Riziko pojistného na jednoletém horizontu

Interní model rizika pojistného v SII

Jiří Thomayer

Aktuárský seminář

17.04.2015

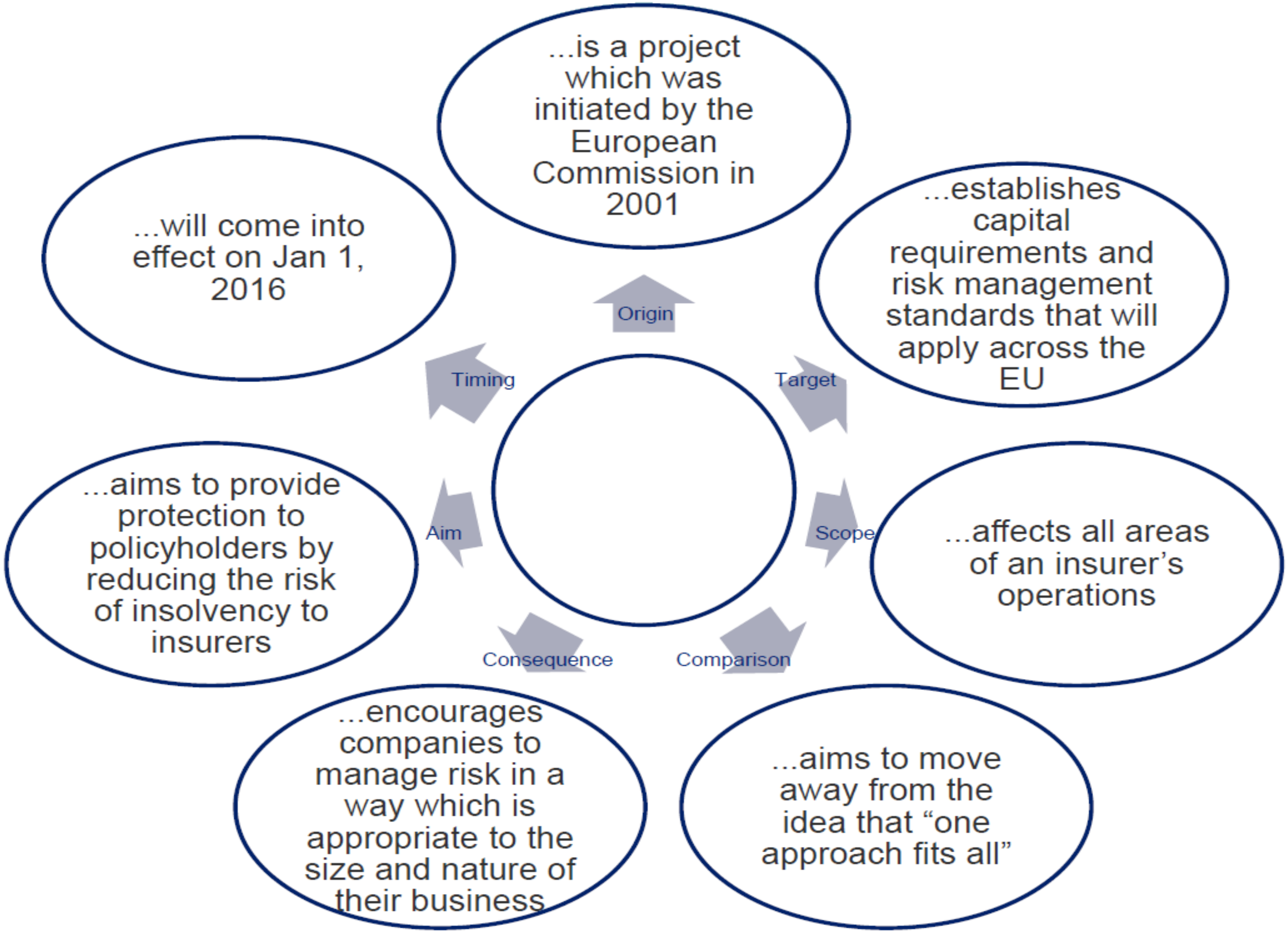
Building a better working world

Obsah

- Solvency II
- Kapitálové požadavky
- Interní model rizika pojistného
- Příklad

Solvency II

Solvency II



- Zdroj: Dana Chládková: *Pojistný matematik a Solventnost II*, Aktuárský seminář 28.03.2014

Solvency II

Koncept SII stojí na třech hlavních pilířích (inspirováno Basel II):

Solvency II

Pilíř I:

Kvantitativní kapitálové požadavky

- Technické rezervy
- Minimální požadovaný kapitál (MCR)
- Solventnostní kapitálový požadavek (SCR)

Pilíř II:

Kvalitativní požadavky

- Procesy řízení rizika a kontroly
- Kvalitativní hodnota rizikového kapitálu
- **ORSA** (Own risk and Solvency assessment)

Pilíř III:

Reporting a publikování

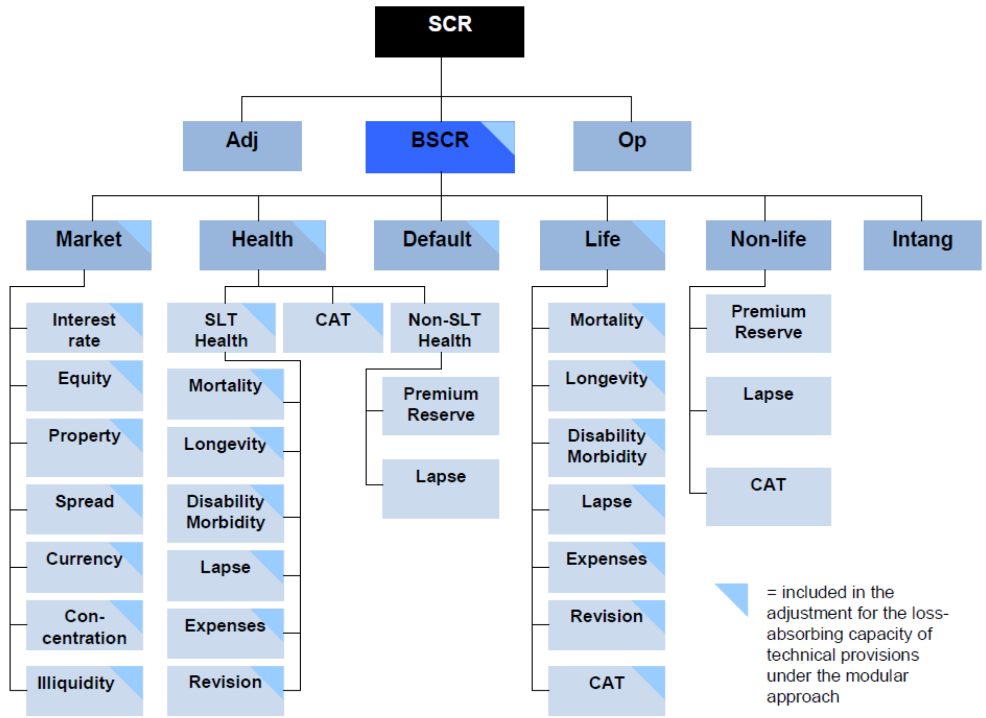
- Harmonizované reporty orgánům dohledu (ČNB)
- Zpráva o solventnosti a finanční situaci
- QRT's (quantitative reporting templates)

Kapitálové požadavky

Kapitálové požadavky v SII

- Základním výstupem v SII jsou hodnoty **SCR** (solventnostní kapitálový požadavek) a MCR (minimální kapitálový požadavek), jež jsou obdobou PMS a GF.
- K výpočtu SCR byla EIOPAou vytvořená tzv. **standardní formule** (SF)
- **Modulární přístup** – „každé“ riziko představuje jeden modul, pro ten je vypočtené SCR, a poté jsou jednotlivá SCR vhodně agregovaná do výsledného SCR
- **Kalibrace:**
  - Každé jednotlivé SCR by mělo představovat **VaR** (hodnotu v riziku) primárního kapitálu (**basic own funds**) na hladině spolehlivosti **0,995** v časovém horizontu **1 roku** (někdy analogicky se uvádí, že k ruinování pojišťovny dojde jednou za 200 let)
  - Aplikuje se na **jednotlivý** modul
  - Agregace probíhá přes korelační koeficienty, které by měly zohledňovat koncovou závislost („korelace za extrémních podmínek“)

Standardní formule



j / i	Market	Default	Life	Health	Non-life
Market	1				
Default	0.25	1			
Life	0.25	0.25	1		
Health	0.25	0.25	0.25	1	
Non-life	0.25	0.5	0	0	1

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} SCR_i SCR_j} + SCR_{intang}, \qquad SCR = BSCR + Op + Adj$$

Adj <= 0 – úprava zohledňující schopnost technických rezerv a odložené daňové povinnosti absorbovat ztrátu

Kapitálové požadavky - NŽP

- Obecně platí pro $BOF \sim \mathrm{UW\ result} = EP - Exp - L$
  - EP je roční **zasloužené pojistné**
  - Exp jsou **provozní náklady**
  - L představují **škody** (součet výplat a změn rezerv během roku (vč. nákladů na likvidaci))
- Dále si rozdělíme $L = L_{AY} + L_{PY} = (P_{AY} + R_{AY}) + (P_{PY} + R_{PY})$
  - L_{AY} - škody vzniklé v současném roce
  - L_{PY} - škody vzniklé v předchozích letech
  - P - výplaty na škodách
  - R - změna rezerv na škodách
- Potom můžeme psát

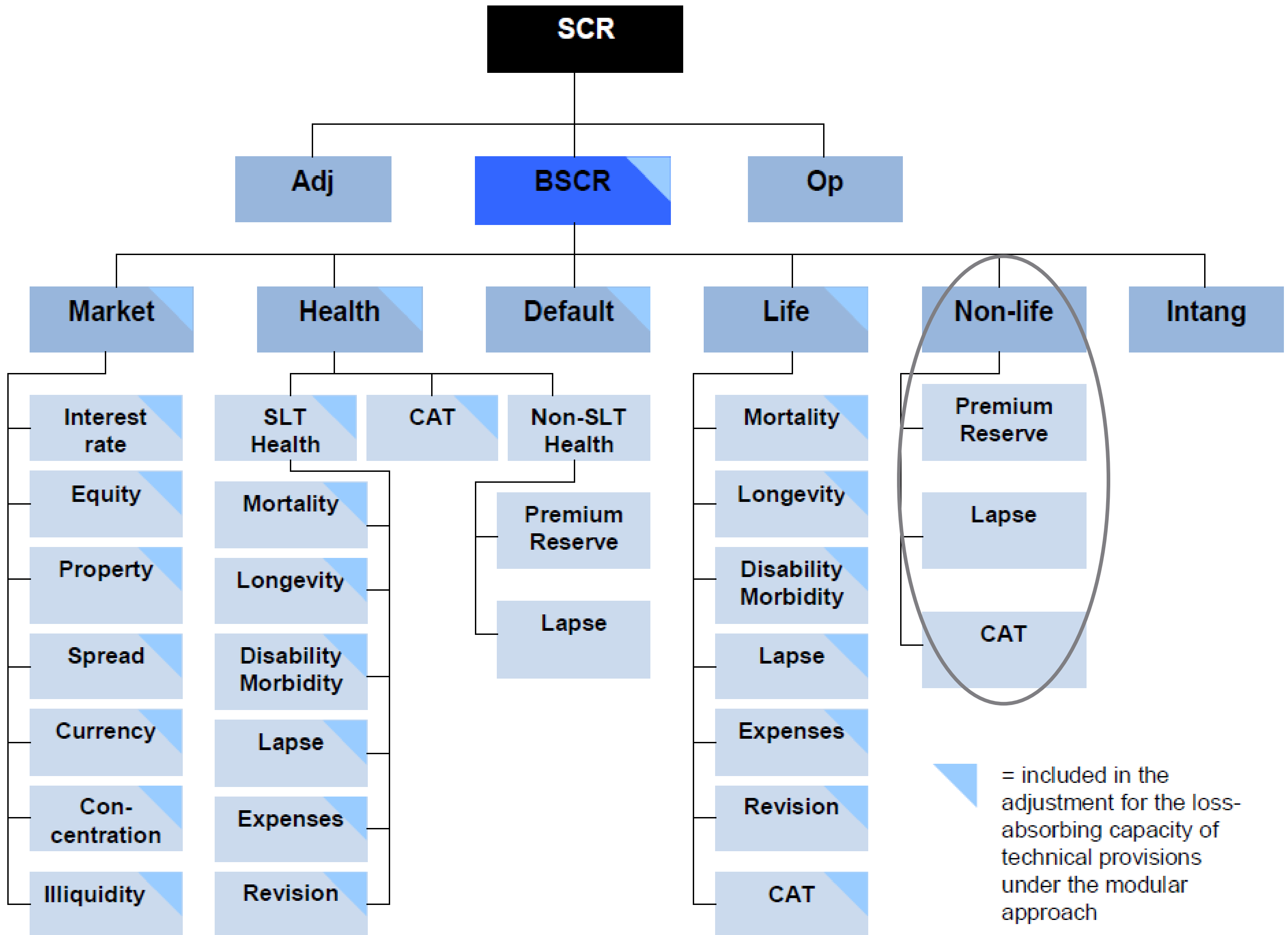
$$BOF_{AY} \sim EP - Exp - (P_{AY} + R_{AY})$$

a

$$BOF_{PY} \sim -(P_{PY} + R_{PY}),$$

kde první část odpovídá riziku pojistného a druhá riziku rezerv.

Modul neživotního pojištění



Modul neživotního pojištění

$CorrNL$	NL_{pr}	NL_{lapse}	NL_{CAT}
NL_{pr}	1		
NL_{lapse}	0	1	
NL_{CAT}	0.25	0	1

- Obdobně jako agregace jednotlivých modulů do celkového SCR, zde v modulu NŽP probíhá agregace podmodulů do SCR odpovídající NŽP stejným přístupem, tedy

$$SCR_{NL} = \sqrt{\sum_{i,j} CorrNL_{i,j} NL_i NL_j},$$

kde NL_i je SCR jednotlivých podmodulů v rámci NŽP

- Pro podmodul NL_{pr} se kapitálový požadavek rizika pojistného a rizika rezerv rovná

$$NL_{pr} = 3\sigma V,$$

kde V je objem rizika, σ je kombinovaná směrodatná odchylka pro riziko rezerv a riziko pojistného

- Odpovídá přibližně tomu, že za předpokladu logaritmicko-normálního rozdělení podkladového rizika, je SCR kalibrováno ve smyslu SII

Interní model rizika pojistného

Interní modely v SII

- Solvency II umožňuje mimo SF používat i jinou metodu výpočtu, pokud bude plně v souladu s principy a předpisy SII – podléhá důkladné kontrole dohledu
- Dělí se na částečné a úplné interní modely
- Úplný interní model je náhrada za SF
- Částečný interní model umožňuje měnit pouze část SF, a to:
  - Jeden nebo více modulů
  - Jeden nebo více submodulů z jednoho i více modulů
  - Modul operačního rizika
  - Modul Adj

EY

Odhad SCR - teorie

Pro připomenutí, riziko pojistného jsme definovali jako

$$BOF \sim EP - Exp - (P_{AY} + R_{AY}) = EP - Exp - L_{AY} \equiv \text{UW result}$$

Pro výpočet SCR je nutné stanovit odhad střední hodnoty a VaR na hladině 0,005 během jednoletého horizontu této veličiny

- Označme $E_t = \mathrm{E}[BOF|\mathcal{F}_t]$, kde $\mathcal{F}_t$ značí veškeré informace známé v čase t
- Cílem je odhadnout E_{t+1} nyní v čase t. S využitím vlastností podmíněné střední hodnoty dostaneme:

$$\mathrm{E}[E_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[BOF|\mathcal{F}_{t+1}]|\mathcal{F}_t] = \mathrm{E}[BOF|\mathcal{F}_t] = E_t$$

- Odhad kvantilu už bohužel takovou vlastnost nemá

- Pro jednoduchost dále předpokládejme, že náhodné jsou pouze škody, platí tedy

$$\boldsymbol{SCR} = \mathrm{E}[BOF|\mathcal{F}_t] - VaR_{0,005}^{t+1}(BOF) = \boldsymbol{VaR_{0,995}^{t+1}(L) - \mathrm{E}L}$$

$$L \equiv L_{AY}$$

Odhad SCR - teorie

- K odhadu VaR na jednoletém horizontu lze využít např. těchto dvou přístupů:
  - použijeme data upravená tak, aby odpovídala ročnímu základu, viz [4]

$$\Rightarrow VaR_{0,995}^{t+1}(L) = VaR_{0,995}^{t}(L) \Rightarrow SCR = VaR_{0,995}^{t}(L) - \mathrm{E}L$$

  - odhadneme VaR nyní v čase t a stanovíme poměr nejistoty stanovený v čase $t+1$ a nyní v čase t (poměr označme jako α)

$$\Rightarrow \mathrm{SCR} = \left(VaR_{0,995}^{t}(L) - \mathrm{E}L\right) * \alpha \;\left(= \frac{nejistota_1}{nejistota_0}\right)$$

- Použití druhého přístupu dle mého názoru je lepší
  - Neztrácíme informaci o celkové variabilitě, která může být užitečná
  - Není nutné měnit data

- Dále se tedy budeme zabývat tímto druhým přístupem

Odhad jednoleté nejistoty

- Pro stanovení poměru α lze za míru nejistoty volit např. $\sqrt{\mathrm{MSEP}}$, což má své velké výhody:
  - Odhady MSEP_0 z vývojových trojúhelníků jsou již dnes velmi rozšířeny a používány (např. Mackův odhad)
  - Pro odhad MSEP_1 lze využít znalostí z rizika rezerv pro účely solventnosti, kde se využívá tzv. CDR (claims development result)
- Pro rok vzniku j je CDR definováno

$$CDR_j = \mathrm{E}\left[C_{j,\infty} \middle| \mathcal{F}_t\right] - \mathrm{E}\left[C_{j,\infty} \middle| \mathcal{F}_{t+1}\right] \equiv C_j^t - C_j^{t+1},$$

kde $C_{j,\infty}$ je celková výše škod vzniklých v roce j v době ukončení jejich vývoje

Odhad jednoleté nejistoty

- Dle Merz, Wüthrich [1] (postaveno na Mackově modelu) platí

$$\widehat{\mathrm{MSEP}}_1^j \triangleq \widehat{\mathrm{MSEP}}^j_{\widehat{CDR}}(0) = \mathrm{E}\left[\left(\widehat{CDR}_j(t+1) - 0\right)^2 | \mathcal{F}_t\right] = \left(\hat{C}_j^t\right)^2 \left(\hat{\Gamma}_j^t + \hat{\Delta}_j^t\right),$$

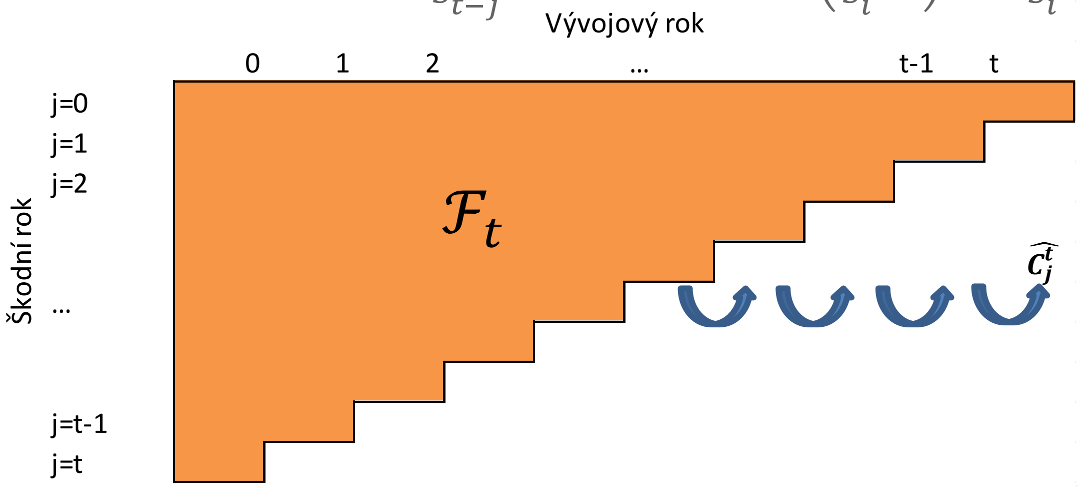
kde $\widehat{CDR}_j(t+1) = \hat{C}_j^t - \hat{C}_j^{t+1}$,

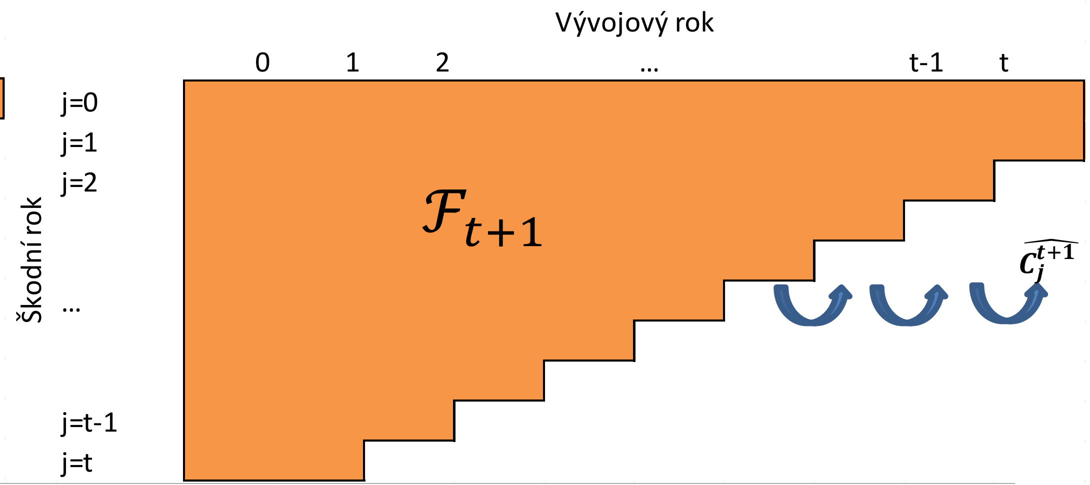
$$\hat{\Gamma}_j^t = \frac{\hat{\sigma}^2_{t-j}/\left(\hat{f}_{t-j}\right)^2}{C_{j,t-j}} + \sum_{i=t-j+1}^{t-1} \left(\frac{C_{t-i,i}}{S_i^{t+1}}\right)^2 \frac{\hat{\sigma}_i^2/\left(\hat{f}_i\right)^2}{C_{t-i,i}},$$

$$\hat{\Delta}_j^t = \frac{\hat{\sigma}^2_{t-j}/\left(\hat{f}_{t-j}\right)^2}{S_{t-j}^t} + \sum_{i=t-j+1}^{t-1} \left(\frac{C_{t-i,i}}{S_i^{t+1}}\right)^2 \frac{\hat{\sigma}_i^2/\left(\hat{f}_i\right)^2}{S_i^t}$$

a

$$S_j^t = \sum_{i=0}^{t-j-1} C_{i,j}$$





Odhad jednoleté nejistoty

- Dosazením definovaných odhadů dostáváme:

$$\widehat{\mathrm{MSEP}}_1^j = \left(\hat{C}_j^t\right)^2 \left(\frac{\hat{\sigma}_{t-j}^2 / \left(\hat{f}_{t-j}\right)^2}{C_{j,t-j}} + \frac{\hat{\sigma}_{t-j}^2 / \left(\hat{f}_{t-j}\right)^2}{S_{t-j}^t} + \sum_{i=t-j+1}^{t-1} \frac{C_{t-i,i}}{S_i^{t+1}} \frac{\hat{\sigma}_i^2 / \left(\hat{f}_i\right)^2}{S_i^t} \right)$$

- Pro Mackův odhad MSEP platí známý vztah

$$\widehat{\mathrm{MSEP}}_0^j = \left(\hat{C}_j^t\right)^2 \sum_{i=t-j}^{t-1} {}^{\hat{\sigma}_i^2}/_{\hat{f}_i^2} \left({}^1/_{\hat{C}_{j,i}} + {}^1/_{S_i^t} \right) =$$

$$= \left(\hat{C}_j^t\right)^2 \left(\frac{\hat{\sigma}_{t-j}^2 / \left(\hat{f}_{t-j}\right)^2}{C_{j,t-j}} + \frac{\hat{\sigma}_{t-j}^2 / \left(\hat{f}_{t-j}\right)^2}{S_{t-j}^t} + \underbrace{\sum_{i=t-j+1}^{t-1} {}^{\hat{\sigma}_i^2}/_{\hat{f}_i^2} \left(\overbrace{{}^1/_{\hat{C}_{j,i}}}^{\geq 0} + {}^1/_{S_i^t} \right)} \right)$$

$$\geq \sum_{i=t-j+1}^{t-1} \frac{\hat{\sigma}_i^2 / \left(\hat{f}_i\right)^2}{S_i^t} \geq \sum_{i=t-j+1}^{t-1} \frac{C_{t-i,i}}{S_i^{t+1}} \frac{\hat{\sigma}_i^2 / \left(\hat{f}_i\right)^2}{S_i^t} \text{ protože } 1 \geq \frac{C_{t-i,i}}{S_i^{t+1}}$$

- Platí tedy $\widehat{\mathrm{MSEP}}_0^j \geq \widehat{\mathrm{MSEP}}_1^j \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_j} = \dfrac{\widehat{\mathrm{MSEP}}_1^j}{\widehat{\mathrm{MSEP}}_0^j} \leq \mathbf{1} \;\; \forall j = 1, \dots, t$

Odhad jednoleté nejistoty

- Pro úplnost (viz [1])

$$\widehat{\mathrm{MSEP}}_1^{total} = \mathrm{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{t} \widehat{CDR}_j(t+1) - 0\right)^2 \middle| \mathcal{F}_t\right] = \sum_{j=0}^{t} \widehat{\mathrm{MSEP}}_1^{j} + 2\sum_{k>l\geq 0} \hat{C}_k^t\, \hat{C}_l^t\,(\hat{\Xi}_k^t + \hat{\Lambda}_l^t)$$

- Riziko rezerv ⇒ „celkové" α^{total}

- Riziko pojistného ⇒ intuitivně α_t (posledního roku vzniku)

- Zároveň vývoj škod pro riziko pojistného není výrazně pomalejší než pro riziko rezerv

  ⇒ výsledné α jako vyšší z α_t a α^{total}

$$\boldsymbol{\alpha = \max(\alpha_t, \alpha^{total})}$$

Odhad jednoleté nejistoty

- Příklad z [1]

Škodní rok / Vývojový rok

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
j=0	2 202 584	3 210 449	3 468 122	3 545 070	3 621 627	3 644 636	3 669 012	3 674 511	3 678 633
j=1	2 350 650	3 553 023	3 783 846	3 840 067	3 865 187	3 878 744	3 898 281	3 902 425	
j=2	2 321 885	3 424 190	3 700 876	3 798 198	3 854 755	3 878 993	3 898 825		
j=3	2 171 487	3 165 274	3 395 841	3 466 453	3 515 703	3 548 422			
j=4	2 140 328	3 157 079	3 399 262	3 500 520	3 585 812				
j=5	2 290 664	3 338 197	3 550 332	3 641 036					
j=6	2 148 216	3 219 775	3 428 335						
j=7	2 143 728	3 158 581							
j=8	2 144 738								

	$\sqrt{\widehat{\mathrm{MSEP}}_1^j}$	$\sqrt{\widehat{\mathrm{MSEP}}_0^j}$	α_j
j=1	567	567	1.000
j=2	1 488	1 566	0.950
j=3	3 923	4 157	0.944
j=4	9 723	10 536	0.923
j=5	28 443	30 319	0.938
j=6	20 954	35 967	0.583
j=7	28 119	45 090	0.624
j=8	53 320	69 552	0.767
Total	81 080	108 401	0.748

$$\Rightarrow \alpha = \max\left(\alpha_8, \alpha^{total}\right) = 0{,}767$$

Teorie extrémních hodnot (EVT)

- VaR chceme počítat na hladině 0,995 -> zajímá nás pravý chvost rozdělení výše škod L

- Odhadujeme distribuční funkci podmíněného rozdělení výše škody za podmínky, že škoda překračuje „vysokou“ prahovou hladinu u

$$F_u(x) = \mathrm{P}(L \leq x | L > u) = \frac{F(x)-F(u)}{1-F(u)}$$

pro $\mathrm{u} \leq x \leq x_F$, kde $x_F \leq \infty$ je pravý konec (nepodmíněného) rozdělení škod F

- Podle věty Pickands-Balkema-de Haan z EVT plyne, že pro velkou skupinu distribučních funkcí používaných v pojišťovnictví platí

$$\lim_{u \to x_F} \sup_{0 \leq x \leq x_F - u} \left| F_u(x+u) - G_{\xi,\beta(u)}(x) \right| = 0$$

kde $G_{\xi,\beta}(x)$ je tzv. zobecněné Paretovo rozdělení (GPD)

Zobecněné Paretovo rozdělení (GPD)

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \dfrac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \text{pro } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\dfrac{x}{\beta}\right) \text{pro } \xi = 0 \end{cases},$$

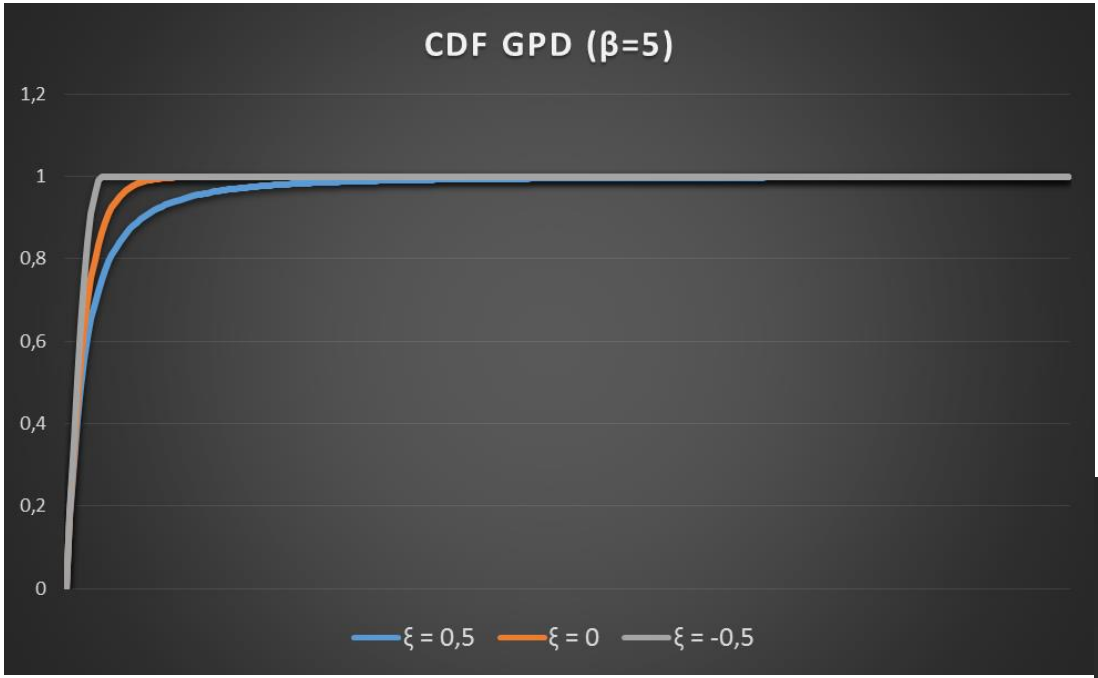
kde $\beta > 0$ **a** $\mathrm{x} \geq 0$ **pro** $\xi \geq 0$

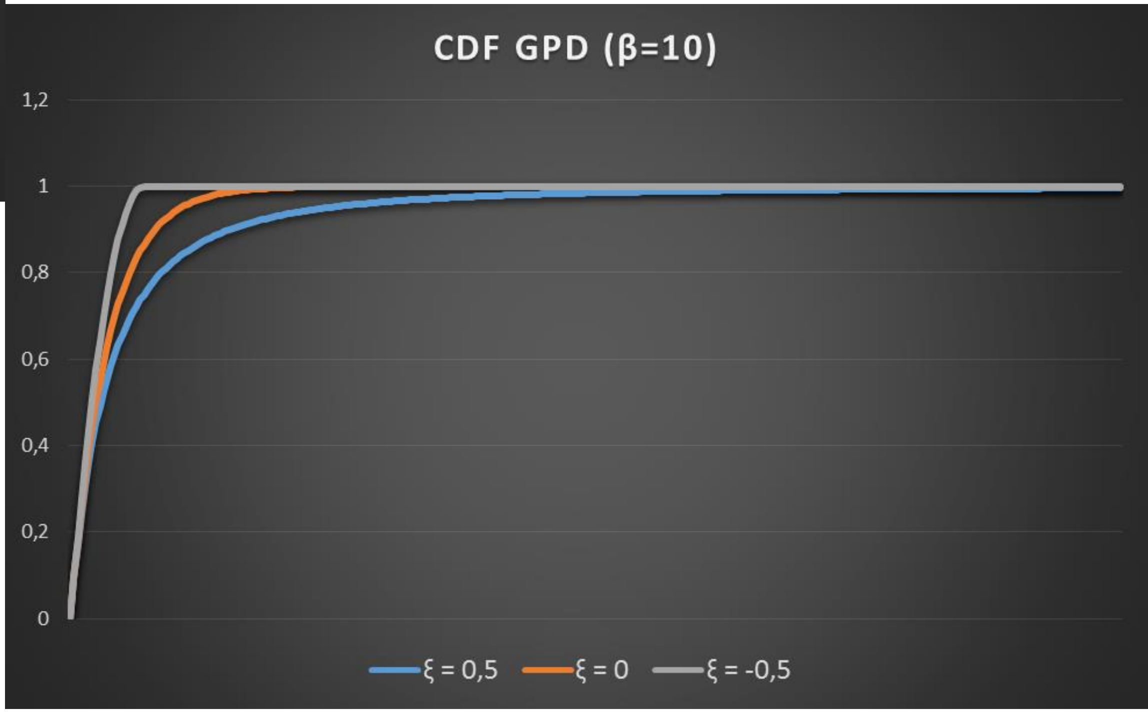
$0 \leq x \leq \beta/\xi$ **pro** $\xi < 0$

- Pro $\xi > 0$ má distribuční funkce **těžké chvosty** a existuje k-tý moment této d.f. kdykoli $k < 1/\xi$

- Pro $\xi = 0$ se jedná o exponenciální rozdělení, kdy existují všechny momenty

Zobecněné Paretovo rozdělení (GPD)





Stanovení prahové hodnoty u

- Existuje více postupů, jak stanovit „správnou“ hladinu u, např:
  - Pomocí funkce průměrů přesahů $e(u)$
  - Pomocí tzv. Hill plotu
  - Expertní úsudek

Funkce průměrů přesahů:

- Pro $X \sim G_{\xi,\beta}(x)$ platí $e(u) = E[X-u|X>u] = \frac{\beta+\xi u}{1-\xi}$ pro $\xi < 1$ a $\beta + u\xi > 0$
  - u stanovíme tak, aby $\widehat{e(x)}$ byla přibližně lineární pro $x > u$

Hill plot:

- Vychází z toho, že maximálně věrohodný odhad ξ je stanovený z k největších hodnot náhodného výběru

$$\hat{\xi} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(\log\left(X_{(n-i+1)}\right) - \log\left(X_{(n-k)}\right)\right)$$

  - vhodnými kandidáty jsou tzv. turning points, více v [3]

Stanovení prahové hodnoty u

Expertní úsudek:

- Z popisu obou metod plyne, že neexistuje žádný explicitní vzorec na vyhledání vhodné prahové hodnoty u

- Je zapotřebí podrobnější pohled

- Prahová hodnota zároveň

  dostatečně „malá“ $\leftarrow$ dostatek dat na proložení GPD

  dostatečně „velká“ $\leftarrow$ pro splnění předpokladů věty na vhodnost použití GPD

EY

Aproximace chvostu rozdělení

- Dospěli jsme k závěru, že GPD je přirozeným modelem pro model škod nad vysokou prahovou hladinou, tedy pro dostatečně velké u můžeme aproximovat
$$F_u(x+u) = G_{\xi,\beta}(x) \rightarrow G_{\xi,\beta}(x-u) = F_u(x) \text{ pro } x \geq u$$

- Z $F_u(x) = \frac{F(x)-F(u)}{1-F(u)}$ odvodíme $F(x)$
$$F(x) = \big(1-F(u)\big)F_u(x) + F(u) \text{ pro } x \geq u$$

- Spojením dostáváme, že původní distribuční funkci F lze aproximovat pro velké u a pro všechna $x \geq u$ funkcí
$$\boldsymbol{F(x) = \big(1-F(u)\big)G_{\xi,\beta}(x-u) + F(u)}$$

Odhad VaR pomocí EVT

- Pro stanovení odhadu předpokládejme, že máme náhodný výběr $L_1, \dots, L_n$ představující roční úhrny škod
- Označme:
  - N_u jako počet pozorování překračující prahovou hodnotu u
  - $\hat{\xi}$ a $\hat{\beta}$ maximálně věrohodné odhady parametrů GPD při prahové hodnotě u
- Potom nestranným odhadem $F(u)$ je $\widehat{F(u)} = 1 - \frac{N_u}{n}$ a odhadem $F(x)$

$$\hat{F}(x) = \left(1 - \widehat{F(u)}\right) G_{\hat{\xi},\hat{\beta}}(x - u) + \widehat{F(u)} = 1 - \frac{N_u}{n}\left(1 + \hat{\xi}\,\frac{x - u}{\hat{\beta}}\right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}}}$$

- Z tohoto odhad VaR na hladině α dostaneme pomocí její inverze

$$\widehat{\boldsymbol{VaR}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \hat{\boldsymbol{F}}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{u} + \frac{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{\hat{\boldsymbol{\xi}}}\left(\left(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{N_u}}(\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\right)^{-\hat{\boldsymbol{\xi}}} - \mathbf{1}\right) \text{ pro } \alpha > F(u)$$

Odhad střední hodnoty škod

- Využijeme rovnosti
$$\mathrm{E}L = \mathrm{E}[L|L \leq u]\mathrm{P}(L \leq u) + \mathrm{E}[L|L > u]\mathrm{P}(L > u)$$

- d.f. $L|L > u$ aproximuje funkcí $G_{\xi,\beta}(x-u)$
- Náhodná veličina s d.f. $G_{\xi,\beta}(x-u)$ má střední hodnotu $u + \frac{\beta}{1-\xi}$
$$\Rightarrow \widehat{\mathrm{E}L} = \mathrm{E}[\widehat{L|L \leq u}]\widehat{F(u)} + \left(u + \frac{\hat{\beta}}{1-\hat{\xi}}\right)\left(1 - \widehat{F(u)}\right)$$

- $\widehat{F(u)} = 1 - \frac{N_u}{n}$
- $\mathrm{E}[\widehat{L|L \leq u}] = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i 1_{L_i \leq u}}{\sum_{i=1}^{n} 1_{L_i \leq u}}$

Shrnutí

Odhadujeme SCR rizika pojistného v následujících krocích:

- Odhadneme pravý chvost rozdělení škody L:
  - Stanovíme prahovou hodnotu u
  - Rozdělení škod nad touto hladinou aproximujeme GPD → pomocí MLE získáme odhady parametrů ξ a β
- Stanovíme odhad VaR ze vzorce $\widehat{VaR}_{0,995}(L) = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\left(\left(\frac{n}{N_u}(1-0{,}995)\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right)$
- Stanovíme odhad střední hodnoty ze vzorce $\widehat{\mathrm{E}L} = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i 1_{L_i \le u}}{\sum_{i=1}^{n} 1_{L_i \le u}}\left(1 - \frac{N_u}{n}\right) + \left(u + \frac{\hat{\beta}}{1-\hat{\xi}}\right)\frac{N_u}{n}$
- Stanovíme odhad poměru nejistoty α jako $\alpha = \max\left(\sqrt{\widehat{\mathrm{MSEP}}_1^t \,/\, \widehat{\mathrm{MSEP}}_0^t}, \alpha^{total}\right)$
- Potom SCR spočteme jako

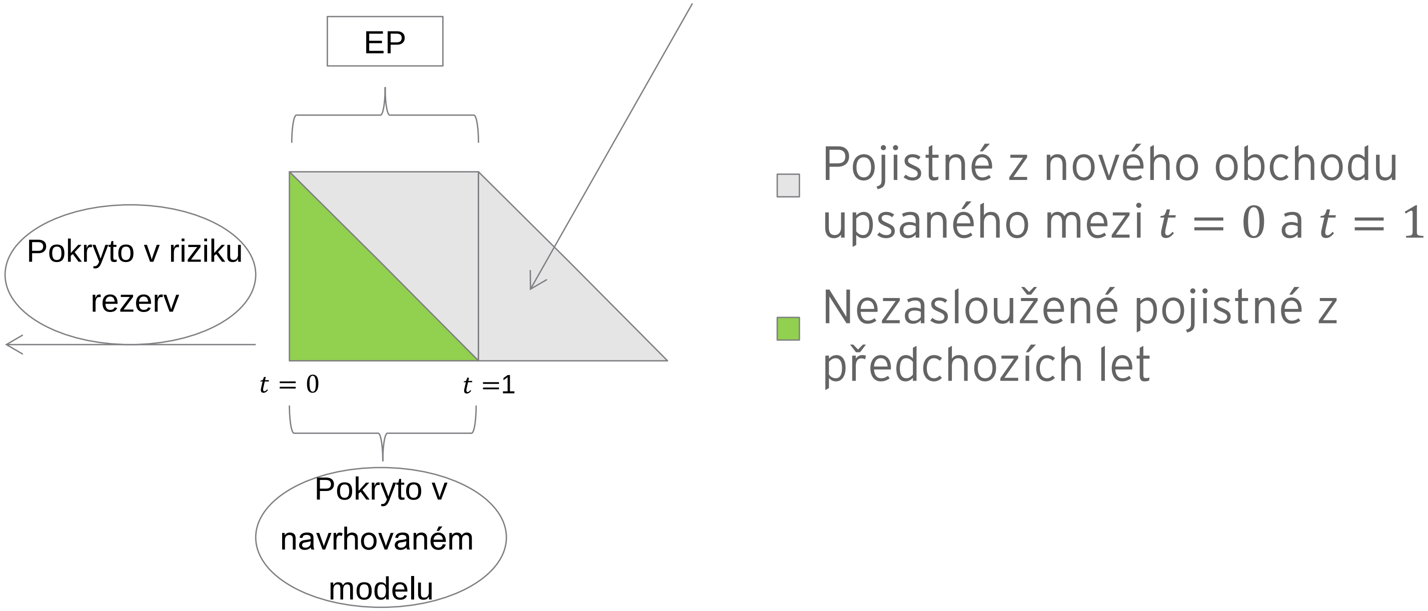
$$\left(\widehat{\boldsymbol{VaR}}_{\mathbf{0,995}}(\boldsymbol{L}) - \widehat{\mathbf{E}\boldsymbol{L}}\right) * \boldsymbol{\alpha}$$

Poznámky

- Celý navrhovaný interní model předpokládá nenáhodnost pojistného a nákladů
- Všechny proměnné by měly být očištěné od zajištění (netto báze)

  => v našem modelu tedy předpokládáme, že žádné zajištění nemáme
- Model plně nepokrývá pojistné z nového obchodu upsaného během následujících 12 měsíců

  => pro úplnost výpočtu SCR by bylo potřeba zohlednit nepokrytou část zaslouženého pojistného



Praktické poznámky

- V praxi většinou neodhadujeme celý roční úhrn škod L, jak jsme si popsali

- Ale uvažujeme, že náhodná veličina $L = Y + \sum_{i=1}^{N} X_i$
  - Y (ne velké škody) - souhrnně (gamma, lognormal) nebo kolektivním modelem rizika
  - N (počet velkých škod) - negativně binomické, Poissonovo…
  - X_i (výše i-té velké škody) - GPD (EVT)

- V tomto případě analytické vyjádření kvantilu obtížné

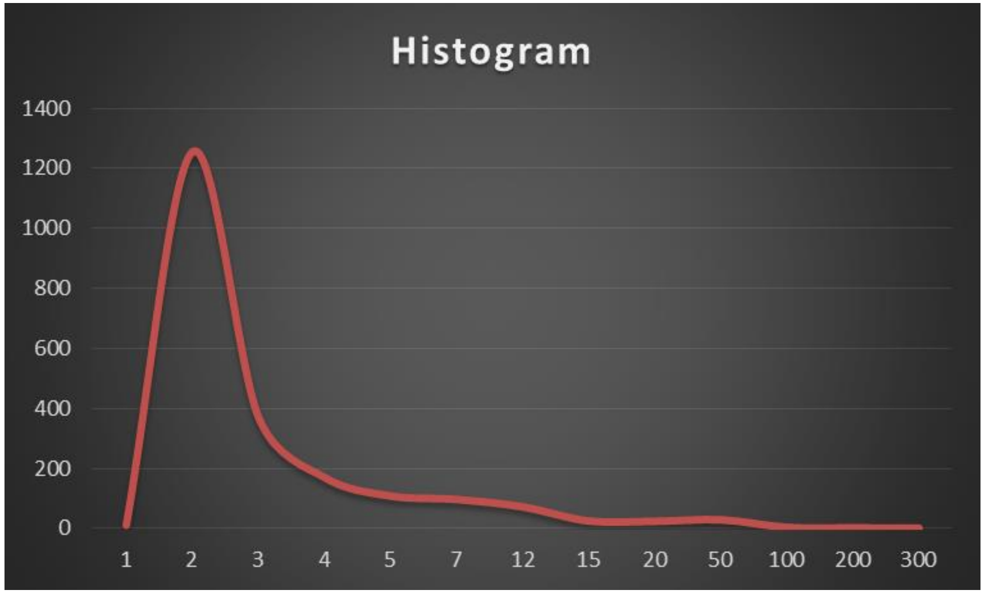
  ⇒ každou z těchto veličin modelujeme zvlášť a na základě simulací potom odvodíme požadovaný kvantil

Příklad

Příklad

- Pro demonstraci jsem využil dat z dánského pojištění požáru, které obsahují **2167** škod mezi lety 1980 a 1990 upravené o inflaci
- Data jsou volně ke stažení na http://www.macs.hw.ac.uk/~mcneil/data.html
- Škody jsou vyjádřené v milionech dánských korun
- Základní charakteristiky:

Střední hodnota	3.39
Rozptyl	8.51
Median	1.78
0,995-kvantil	38.15
Min	1.00
Max	263.25

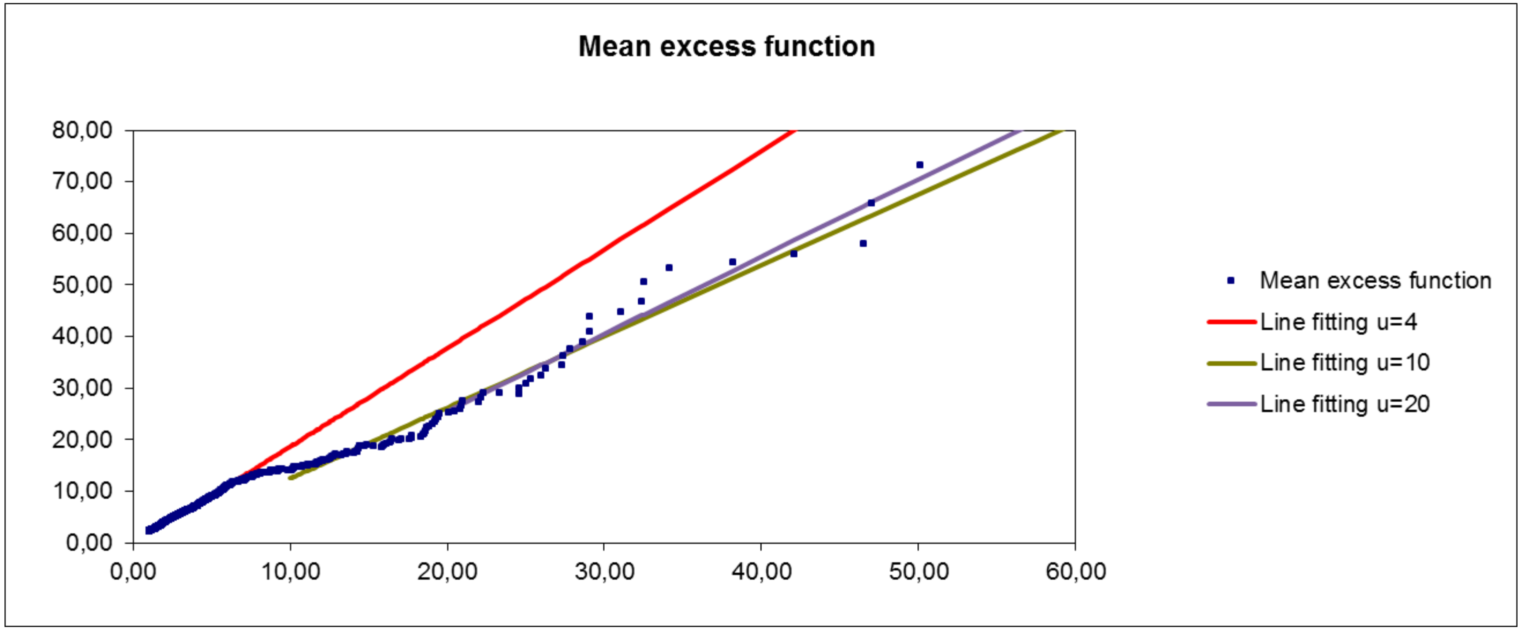


Příklad

1. a. Stanovení prahové hodnoty

- Nakreslíme odhad funkce průměrů přesahů ze vztahu

$$\widehat{e(u)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(L_i - u)1_{L_i > u}}{\sum_{i=1}^{n} 1_{L_i > u}}$$



- Hodnota 10 i 20 dobře zachycují lineární trend $e(u)$, s pomocí Hill plotu nakonec zvolíme hladinu 19,45

Příklad

1. b. Odhad parametrů GPD

- Pomocí metody maximální věrohodnosti odhadneme parametry ξ a β GPD
- Věrohodnostní funkce $L(\xi, \beta)$ pro část náhodného výběru překračující prahovou hodnotu u

$$L(\xi, \beta) = \prod_{i=n-N_u+1}^{n} \frac{1}{\beta}\left(1 + \frac{\xi\left(L_{(i)} - u\right)}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \quad \text{pro } \beta > 0$$

a pro s.v. $x > u$, když $\xi > 0$ nebo s.v. $u < x < u - {}^{\beta}/_{\xi}$, když $\xi < 0$

- Řešením rovnice

$$\left(\hat{\xi}, \hat{\beta}\right)^T = \underset{\beta>0, \xi\in\mathbb{R}}{\operatorname{argmax}} \log\left(L(\xi, \beta)\right)$$

dostáváme hledané parametry

GPD parameters	
N_u	37.00
u	19.45
$\hat{\xi}$	0.645
$\hat{\beta}$	10.107

Příklad

GPD parameters	
N_u	37.00
u	19.45
$\hat{\xi}$	0.645
$\hat{\beta}$	10.107

2. a 3. Odhad hodnoty v riziku a střední hodnoty

- Pro odhad VaR na hladině 0,995 jsme si odvodili vzorec

$$\widehat{VaR}_{0{,}995}(L) = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\left(\left(\frac{n}{N_u}(1-0{,}995)\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right) = \mathbf{38,385}$$

- Podmínkou je $0{,}995 > \widehat{F(u)}$, kde $\widehat{F(u)} = 1 - {}^{N_u}/_{n} = 0{,}983$

- Pro odhad střední hodnoty jsme si odvodili vzorci

$$\widehat{\mathrm{E}L} = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i 1_{L_i \le u}}{\sum_{i=1}^{n} 1_{L_i \le u}}\left(1 - \frac{N_u}{n}\right) + \left(u + \frac{\hat{\beta}}{1-\hat{\xi}}\right)\frac{N_u}{n}$$

$$\widehat{\mathrm{E}L} = \mathbf{3,453}$$

Příklad

4. a 5. Určení SCR

- Pro výpočet SCR je nutné ještě stanovit odhad poměru nejistoty α

- Z dat bohužel toto nebylo pro jejich nekomplexnost možné určit

- Pro názornost není důležité, z dřívějšího příkladu jsme odvodili

$$\alpha^{total} = 0{,}748$$
$$\alpha_t = 0{,}767$$

$$\Rightarrow \alpha = \max(\alpha_t, \alpha^{total}) = 0{,}767$$

- Potom výsledné

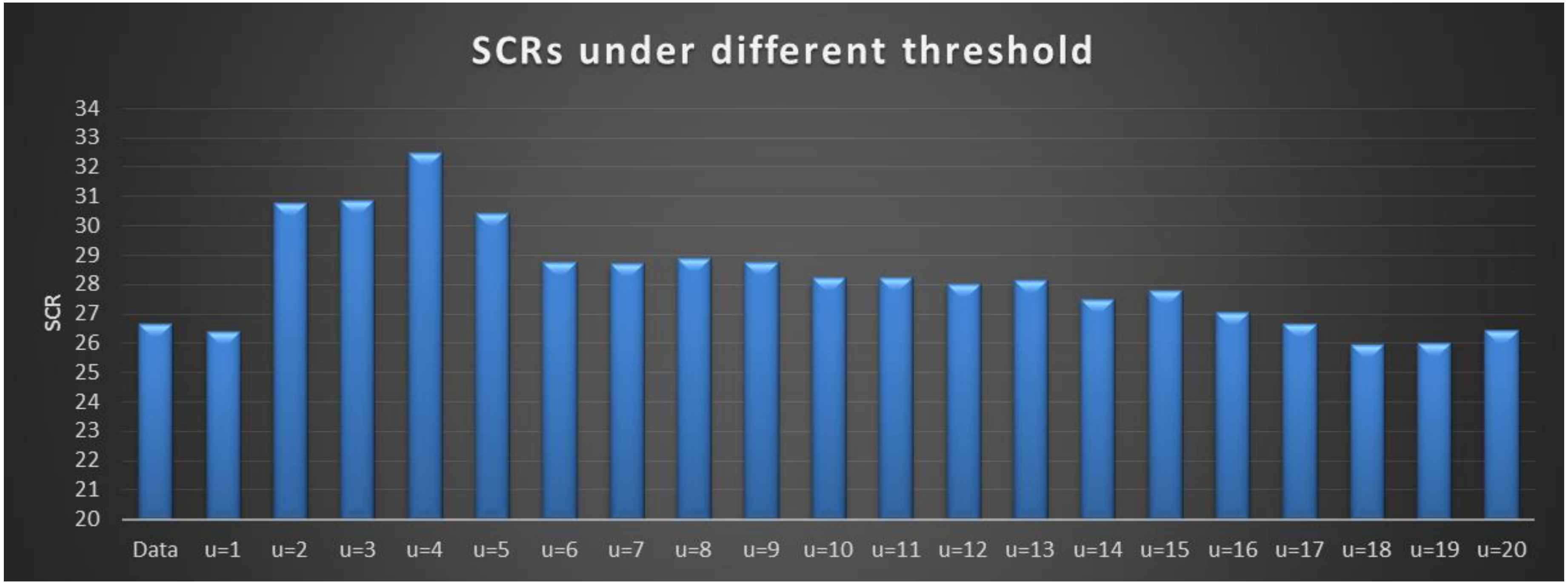
$$SCR = \left(\widehat{VaR}_{0{,}995}(L) - \widehat{\mathrm{E}L}\right) * \alpha = 34{,}932 * 0{,}767 = 26{,}793$$

Příklad

Citlivost SCR na volbě prahové hodnoty

- Obecně je výsledek SCR značně závislý na volbě prahové hodnoty

- I našem případě „hezkých“ dat vychází SCR mezi 26 a 32,5 mio DKK



⇒ **Je dobré ověřit správnost volby prahové hodnoty**

Příklad

Validace prahové hodnoty

- Pro validaci správné volby lze využít různých metod, např:
  - Statistické testování hypotézy H_0: $\hat{F}_u = G_{\hat{\beta},\hat{\xi}}$
  - QQ graf
  - Test dobré shody

- K testování hypotézy jsme si vybrali Kolmogorovův-Smirnovův test, který definuje testovací statistiku jako

$$\text{K–S} = \sup_{x>u}\left|\hat{F}_u(x) - G_{\hat{\beta},\hat{\xi}}(x-u)\right|$$

- Dá se dokázat, že asymptoticky má $\sqrt{N_u}\text{K–S}$ Kolmogorovo rozdělení

$$\text{P}\left(\sqrt{N_u}\text{K–S} \leq \text{x}\right) = 1 - 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}e^{-2i^2x^2}$$

- p-hodnota v našem případě je 0,996 ⇒ **nezamítáme** nulovou hypotézu na hladině 0,05

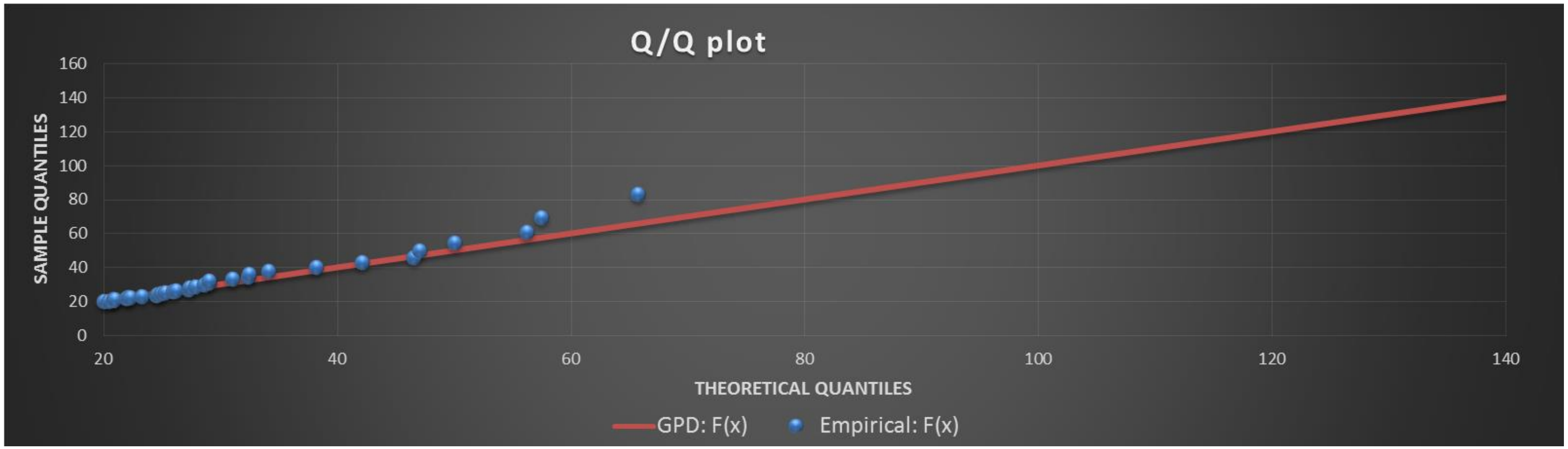
Příklad

Validace prahové hodnoty – QQ graf

- QQ graf znázorňuje **teoretické** kvantily proti **empirickým** kvantilům
- **Teoretické kvantily** dostaneme pomocí inverzní distribuční funkce vysokých škod (GPD) ze vzorce

$$G^{-1}_{\beta,\xi}\left(\hat{F}_u\left(L_{(n-N_u+i)}\right)\right) = u + \frac{\beta}{\xi}\left(\left(1-\hat{F}_u\left(L_{(n-N_u+i)}\right)\right)^{-\xi} - 1\right), i = 1, \dots, N_u - 1$$

- Odpovídající **empirické kvantily** jsou hodnoty náhodného výběru, protože $\hat{F}_u^{-1}\left(\hat{F}_u\left(L_{(n-N_u+i)}\right)\right) = L_{(n-N_u+i)}$ pro $i = 1, \dots, N_u - 1$, kde $\hat{F}_u(x) = \frac{1}{N_u}\sum_{i=1}^{n} 1_{(u<L_i\leq x)}$



EY

Praktické poznámky

- Bohužel Kolmogorovův-Smirnovův test má malou sílu, nezamítne tedy někdy i zjevně špatnou aproximaci rozdělení
- Volbou „špatného“ $u = 4$ je p-hodnota KS testu rovna $0{,}634$, a tedy ani v tomto případě nezamítáme nulovou hypotézu na hladině $0{,}05$

⇒ Je proto potřeba data více zkoumat a nespoléhat se na jeden jediný test

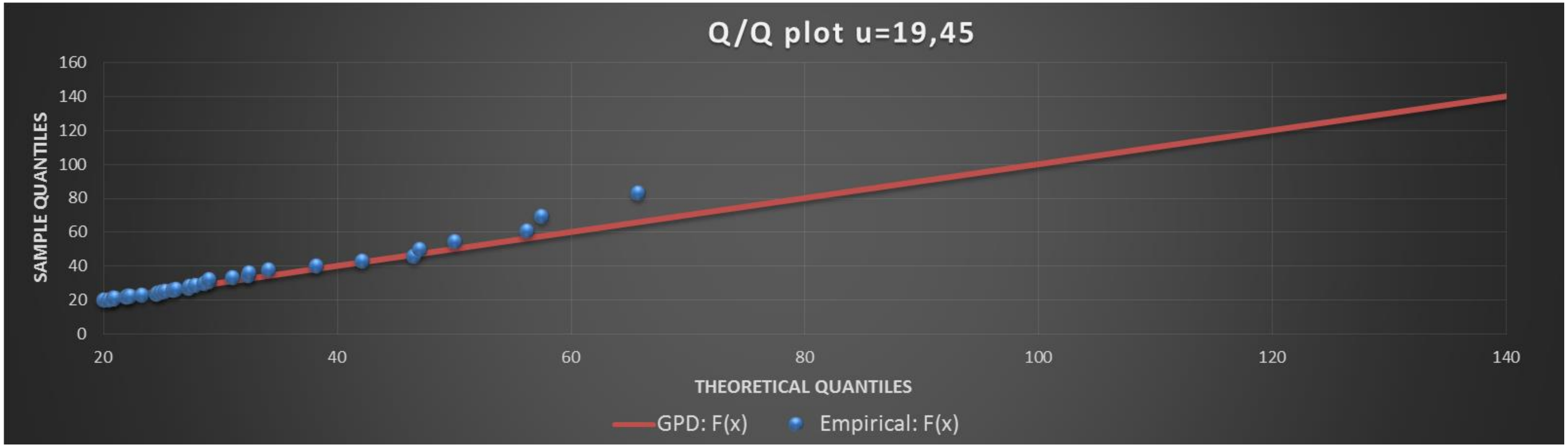
- Další hojně využívané testy Andersonův-Darlingův test nebo chí-kvadrát test dobré shody

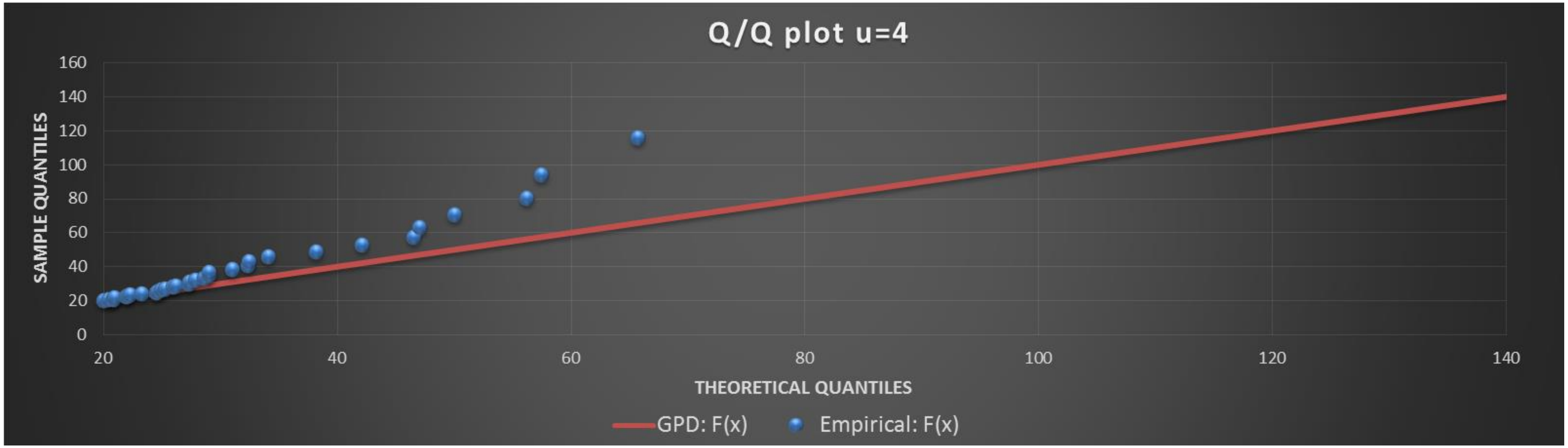
- Někdy lze vyvodit špatnou aproximaci také pomocí QQ grafu

- V praxi lze přes teoreticky prokázané GPD použít i jiné rozdělení
  - Logaritmicko normální rozdělení
  - Gamma rozdělení
  - Weibullovo
  - Burrovo

Praktické poznámky

Odhalení špatné aproximace QQ grafem





Zdroje

[1] Merz M., Wüthrich M.V.: *Modeling the Claims Development Result For Solvency Purposes, 2008*
http://www.casact.org/pubs/forum/08fforum/21Merz_Wuetrich.pdf

[2] European Commission: *QIS5 Technical Specifications, 2010*
http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/qis5/201007/technical_specifications_en.pdf

[3] Chunyang Z., Chongfeng W., Hailong L., Fubing L.: *A New Method to Choose the Threshold in the POT Model, 2007*
http://ssrn.com/abstract=987796

[4] Daniel Rufelt: *Methods for estimating premium risk for SII purposes, 2011*
http://www2.math.su.se/matstat/reports/master/2011/rep10/report.pdf

Děkuji za pozornost

Jiri.Thomayer@cz.ey.com

Building a better
working world

EY | Assurance | Tax | Transactions | Advisory

Informace o EY

EY je předním celosvětovým poskytovatelem odborných poradenských služeb v oblasti auditu, daní, transakčního a podnikového poradenství. Znalost problematiky a kvalita služeb, které poskytujeme, přispívají k posilování důvěry v kapitálové trhy i v ekonomiky celého světa. Výjimečný lidský a odborný potenciál nám umožňuje hrát významnou roli při vytváření lepšího prostředí pro naše zaměstnance, klienty i pro širší společnost.

Název EY zahrnuje celosvětovou organizaci a může zahrnovat jednu či více členských firem Ernst & Young Global Limited, z nichž každá je samostatnou právnickou osobou. Ernst & Young Global Limited, britská společnost s ručením omezeným garancí, služby klientům neposkytuje. Pro podrobnější informace o naší organizaci navštivte prosím naše webové stránky ey.com.

ey.com