



INSURANCE

# Využití korelace v rezervování povinného ručení

Ondřej Bušta, Actuarial services  
7. prosince 2007

ADVISORY

AUDIT ■ TAX ■ ADVISORY

# Agenda

---

- **Nástin problému**
- **Majetkové škody**
- **Zdravotní škody**
- **Korelační analýza a riziko pojistného**
- **Nejlepší odhad rezerv**

# Nástin problému

- **Různý charakter majetkových a zdravotních škod**
  - Zpoždění v likvidaci
  - Výše a volatility škod
- **Řešení: Využití korelace mezi majetkovými a zdravotními škodami**
- **Předpoklady k využití korelace:**
  - Majetkové škody
    - Kratší likvidace než u zdravotních škod
    - Riziko chyby v odhadu rezervy malé ve srovnání s rizikem pojistného
  - Korelace mezi majetkovými a zdravotními škodami

# Nástin problému

---

- **Nástroje:**
  - Volba teoretického rozdělení
  - Měření korelace
  - Agregační funkce (teorie kopul)
  - Monte Carlo simulace

# Některá zjednodušení (zdravotní škody)

- Zpoždění v likvidaci zdravotních škod nezávisí na riziku
- Nulový run-off od momentu hlášení prvního příznaku zdravotní škody
- Stejná distribuční funkce pro všechny zdravotní škody
- Žádné změny v likvidačním procesu
- Data jsou očištěna o vliv změn:
  - Pojistných sazeb
  - Škodní inflace
  - Škodní frekvence

# Příklad zadání

- Statutární výkazy

Rok	Pojistné	RBNS majetek (stav 2006)	RBNS zdraví (stav 2006)
2000	5 000	0	266
2001	5 000	0	263
2002	5 000	4	266
2003	5 000	12	607
2004	5 000	71	392
2005	5 000	224	238
2006	5 000	924	43

- Nákladové procento 25%

# Majetkové škody

# Klasický odhad rezerv (I)

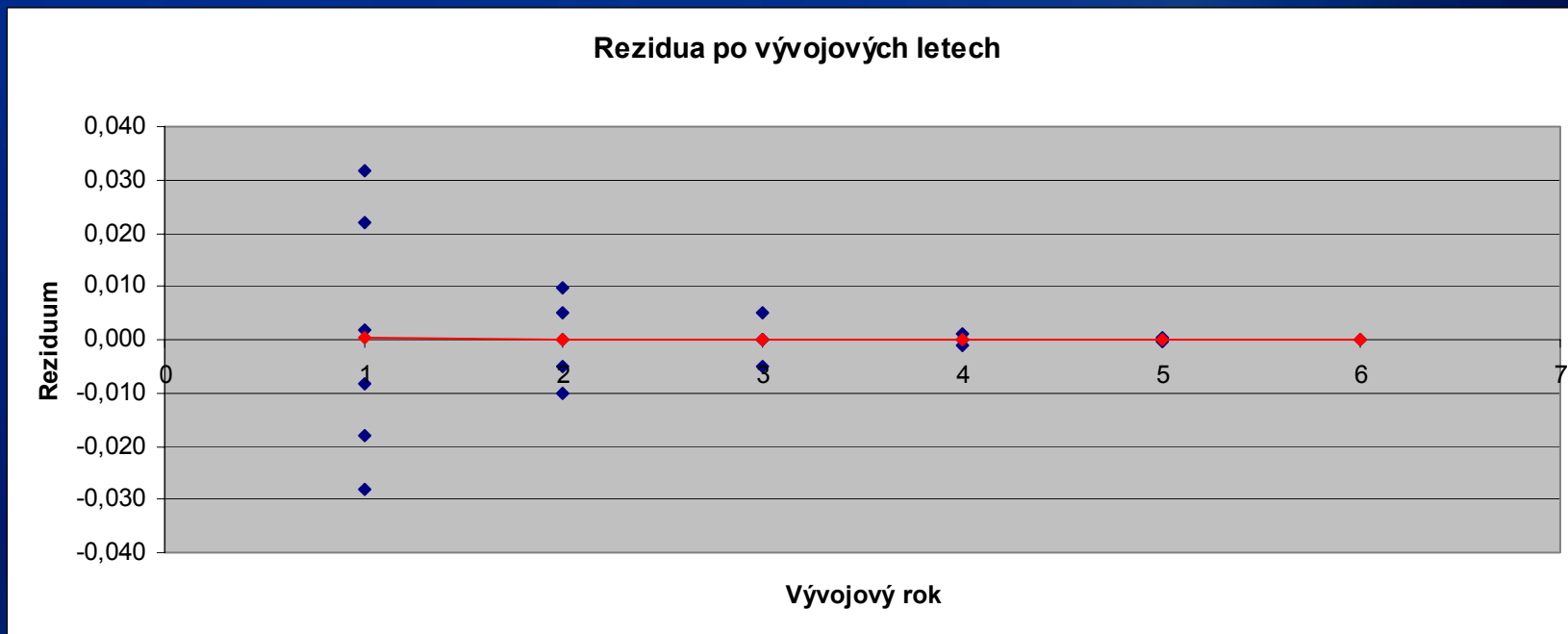
- Kumulativní trojúhelník výplat:

	1	2	3	4	5	6	7
31.12.2000	1 700,0	2 380,0	2 487,1	2 536,8	2 539,4	2 541,9	2 542,2
31.12.2001	1 900,0	2 603,0	2 759,2	2 828,2	2 836,6	2 842,3	
31.12.2002	1 800,0	2 556,0	2 683,8	2 724,1	2 729,5		
31.12.2003	2 100,0	2 919,0	3 079,5	3 141,1			
31.12.2004	1 900,0	2 717,0	2 825,7				
31.12.2005	1 800,0	2 484,0					
31.12.2006	2 000,0						



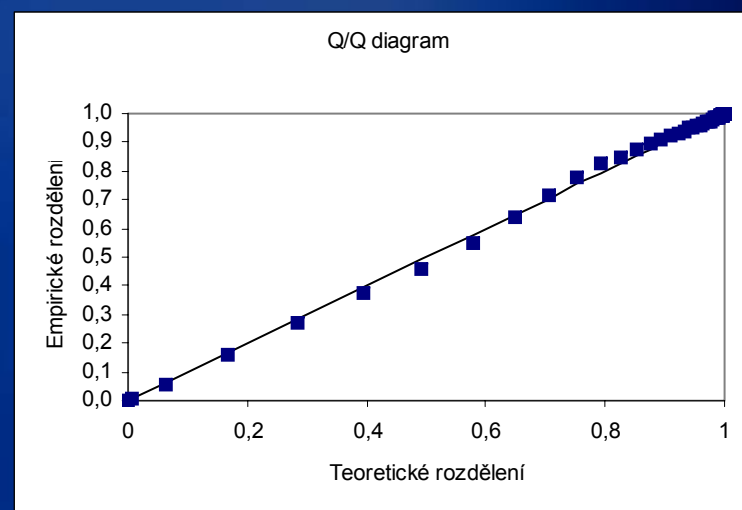
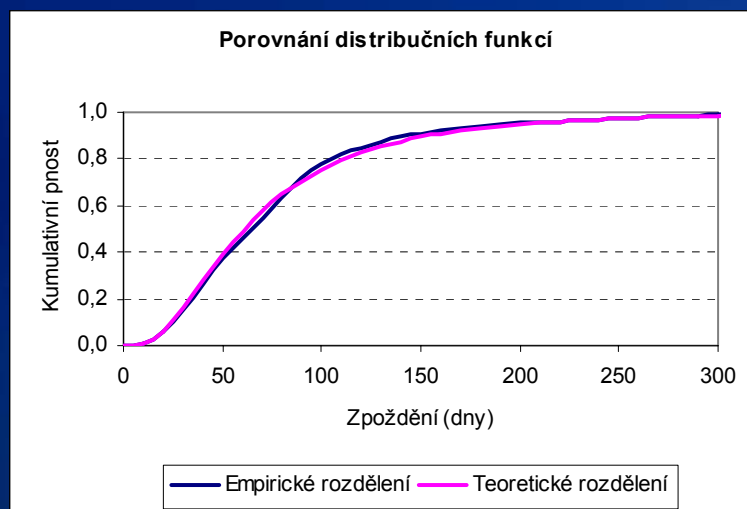
# Klasický odhad rezerv (II)

- Analýza reziduí:



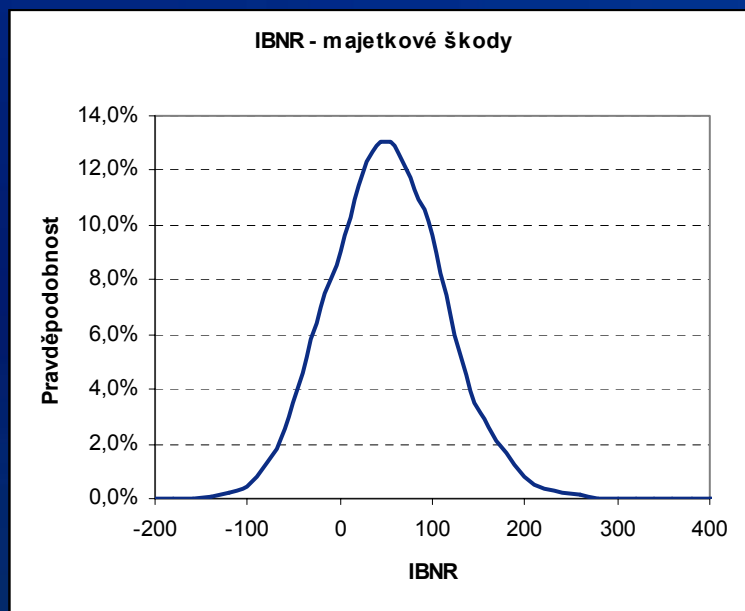
# Rezervy: Analýza rozdělení

- Kumulativní trojúhelník výplat metoda chain ladder
- Analýza rozdělení zpoždění
  - Porovnání rozdělení empirického zpoždění výplaty s teoretickým rozdělením



# Rezervy: Stochastická simulace

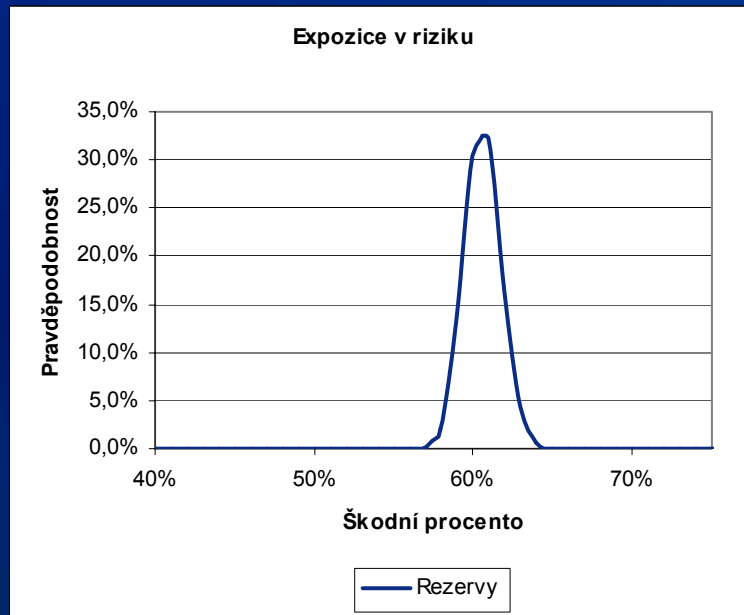
- Předpoklad stejného rozdělení vývojových faktorů jako vlastního zpoždění
- Za předpokladu logaritmicko-normálního rozdělení:



Kvantil	IBNR
$E(X)$	41,2
50%	40,5
75%	82,3
90%	119,5
95%	145,0
99,50%	211,9

# Rezervy: Stochastická simulace

- Škodné procento pro rok poslední vývojový rok (2006)



Kvantil	Škodné procento
$E(X)$	60,1%
50%	60,1%
75%	60,9%
90%	61,6%
95%	62,0%
99,50%	63,2%

# Pojistné: Analýza střední hodnoty

- Analýza škodných procent po letech vzniku:

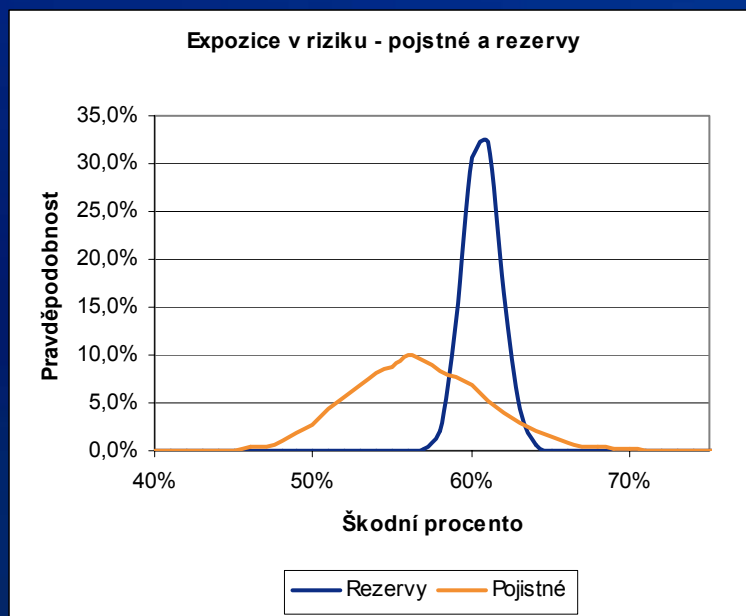
Rok	Pojistné	Škody	Škodné procento
2000	5 000	2 542	50,84%
2001	5 000	2 843	56,85%
2002	5 000	2 734	54,68%
2003	5 000	3 153	63,05%
2004	5 000	2 893	57,86%
2005	5 000	2 671	53,41%
2006	5 000	3 006	60,12%

- Výsledné hodnoty

- EX= 56,12%
- VarX=0,00178

# Pojistné: Stochastická simulace

- Stochastická simulace škodného procenta
- Při předpokladu logaritmicko-normálního rozdělení škodného procenta ( $LN(-0,5806 ; 0,0056)$ ):



Kvantil	Škodné procento
$E(X)$	56,1%
50%	56,0%
75%	58,9%
90%	61,6%
95%	63,3%
99,50%	67,9%

# Zdravotní škody

# Klasický odhad rezerv (I)

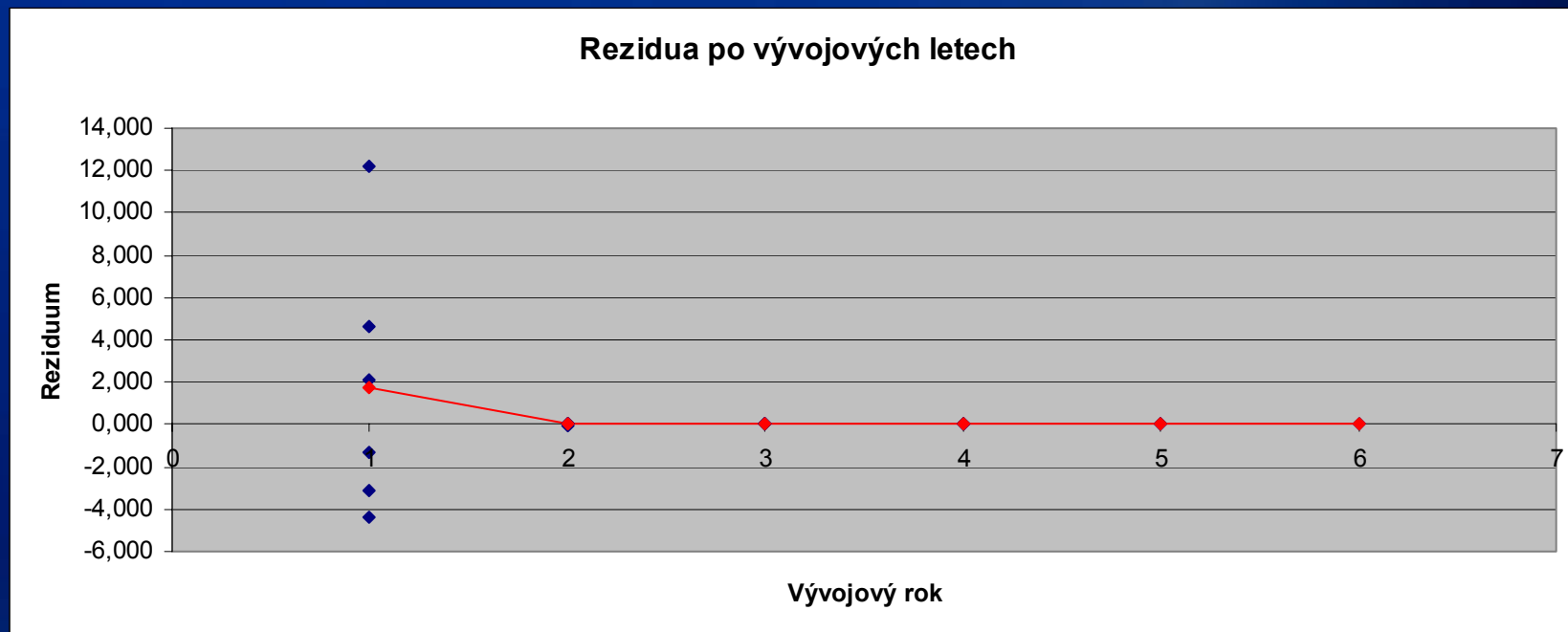
- Kumulativní trojúhelník podle zaúčtování:

	1	2	3	4	5	6	7
31.12.2000	24,3	516,3	525,5	526,8	531,2	531,2	531,2
31.12.2001	41,2	457,6	484,9	484,9	486,5	486,5	
31.12.2002	57,7	342,7	362,3	367,7	369,1		
31.12.2003	93,8	726,2	756,3	759,0			
31.12.2004	31,9	435,1	461,4				
31.12.2005	53,7	250,9					
31.12.2006	42,7						



# Klasický odhad rezerv (II)

- Analýza reziduí:



# Zdravotní škody

- Kolektivní model rizika

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

S – úhrn škodných nároků

N – počet pojistných událostí

X – škodní nárok

# Rezervy: Počty škod

- Trojúhelník počtu škod:

	1	2	3	4	5	6	7
31.12.2000	5,0	42,0	45,0	46,0	47,0	47,0	47,0
31.12.2001	10,0	50,0	55,0	55,0	56,0	56,0	
31.12.2002	4,0	38,0	41,0	43,0	43,0		
31.12.2003	10,0	55,0	58,0	60,0			
31.12.2004	7,0	51,0	56,0				
31.12.2005	7,0	40,0					
31.12.2006	7,0						

# Rezervy: Počty škod

- Analýza reziduí:



# Pojistné: Počty škod

- **Doplněný trojúhelník:**

	1	2	3	4	5	6	7	Tail
<b>31.12.2000</b>	5,0	42,0	45,0	46,0	47,0	47,0	47,0	<b>47,9</b>
<b>31.12.2001</b>	10,0	50,0	55,0	55,0	56,0	56,0	<b>56,0</b>	<b>57,1</b>
<b>31.12.2002</b>	4,0	38,0	41,0	43,0	43,0	<b>43,0</b>	<b>43,0</b>	<b>43,9</b>
<b>31.12.2003</b>	10,0	55,0	58,0	60,0	<b>60,8</b>	<b>60,8</b>	<b>60,8</b>	<b>62,1</b>
<b>31.12.2004</b>	7,0	51,0	56,0	<b>57,4</b>	<b>58,2</b>	<b>58,2</b>	<b>58,2</b>	<b>59,4</b>
<b>31.12.2005</b>	7,0	40,0	<b>43,2</b>	<b>44,3</b>	<b>44,9</b>	<b>44,9</b>	<b>44,9</b>	<b>45,8</b>
<b>31.12.2006</b>	7,0	<b>44,9</b>	<b>48,5</b>	<b>49,8</b>	<b>50,5</b>	<b>50,5</b>	<b>50,5</b>	<b>51,5</b>

# Pojistné: Počty škod

- Analýza počtu škod po letech vzniku:

Rok	Kmen (počet)	Škody
2000	1 000 000	47,9
2001	1 000 000	57,1
2002	1 000 000	43,9
2003	1 000 000	62,1
2004	1 000 000	59,4
2005	1 000 000	45,8
2006	1 000 000	51,5

- Dlouhodobý průměr:

EN=52,7

VarN=59,91

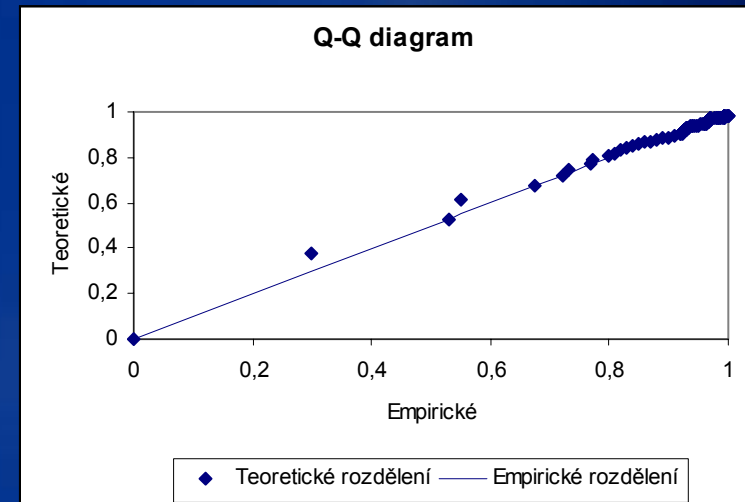
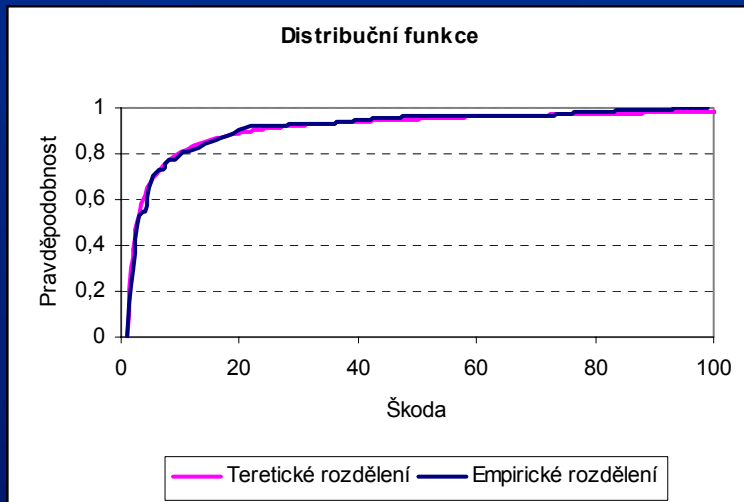
# Pojistné: Počty škod – analýza rozdělení

- Ze vztahu  $E(N)$  a  $Var(N)$  zvoleno negativně binomické rozdělení :

$$N \rightarrow NBi(301,96; 0,85)$$

# Pojistné: Výše škod

- Porovnání empirického rozdělení a teoretického rozdělení:



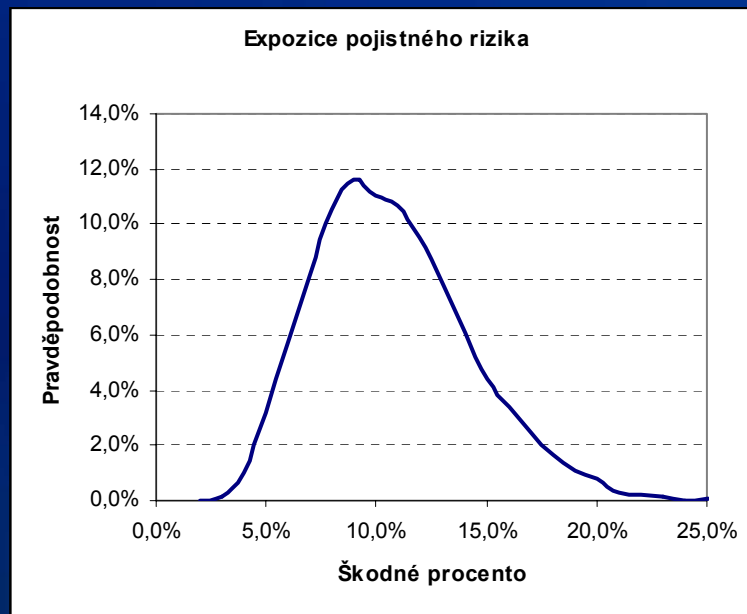
- Zvoleno zobecněné rozdělení:

$$X \rightarrow Pareto(1; 0,66; 200)$$



# Pojistné: Stochastická simulace

- Stochastická simulace počtu škod a výše škod
- Nezávislost počtu na výši škody



Kvantil	Škodné procento
$E(X)$	10,3%
50%	9,9%
75%	12,4%
90%	15,1%
95%	16,7%
99,50%	21,2%

# Korelace – pojistné riziko

# Korelační analýza

---

- **Analyzujeme korelaci:**
  - Škodné procento – majetkové škody
  - Počet škod – zdravotní škody

# Korelační koeficienty

- **Kendalovo tau:**

$$\tau = \frac{2P}{\frac{1}{2}n(n-1)} - 1$$

*Kde:*

*n – počet pozorování*

$$P = \sum_{i < j} \text{sign}[(X_i - X_j)(Y_i - Y_j)]$$

- **Spearmanovo rho:**

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

*Kde:*

*d – rozdíl mezi pořadími*

*n – počet pozorování*

# Korelační koeficienty - výsledky

- Data po letech vzniku:

Rok	Majetkové škody	Zdravotní škody
2000	50,8%	47,9
2001	56,9%	57,1
2002	54,7%	43,9
2003	63,1%	62,1
2004	57,9%	59,4
2005	53,4%	45,8
2006	60,1%	51,5

- Korelační koeficienty:

$$\tau = 60\%$$

$$\rho = 77,1\%$$

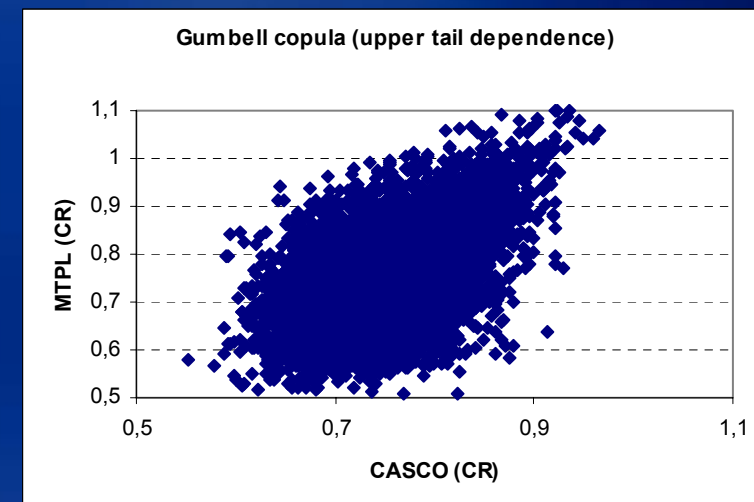
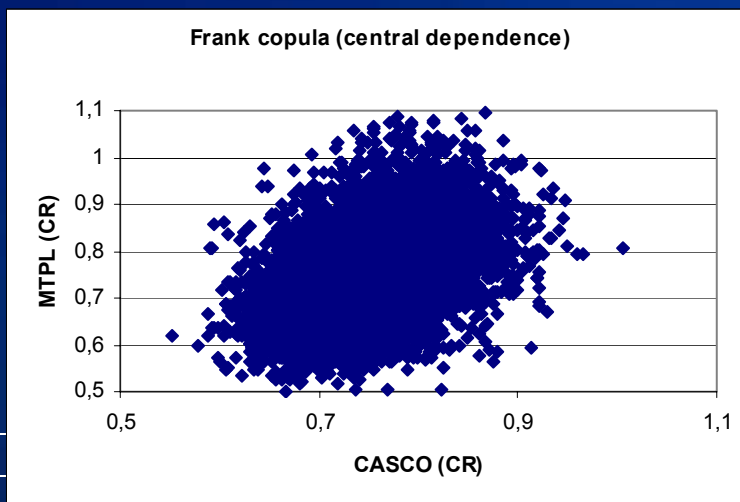
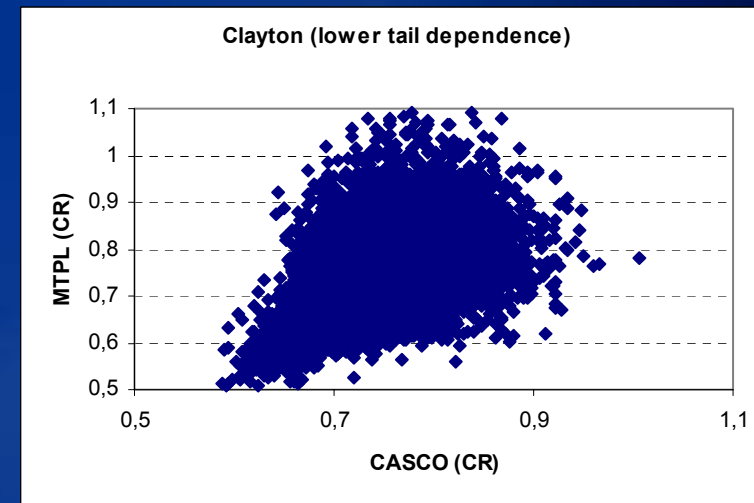
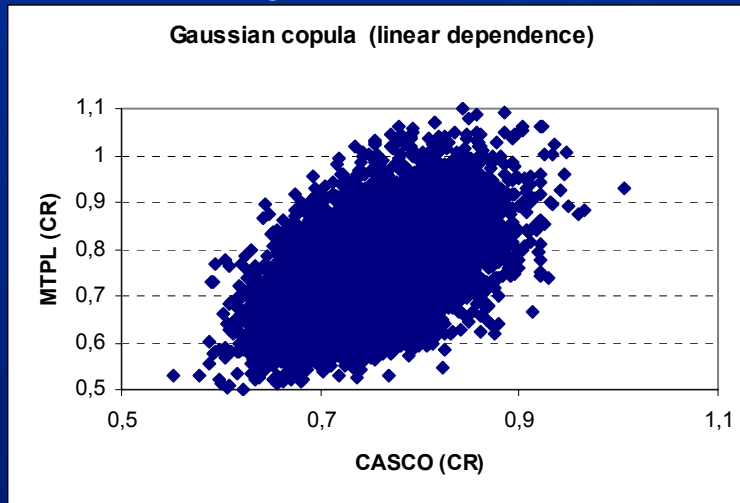
# Agregace rizik

- Archimedovské kopuly:

Název	$C_\alpha(u, v)$	$\varphi_\alpha(t)$	$\alpha \in$
Clayton	$\max\left(\left[u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1\right]^{\frac{1}{\alpha}}, 0\right)$	$\frac{1}{\alpha}(t^{-\alpha} - 1)$	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$
Frank	$-\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha u} - 1)(e^{-\alpha v} - 1)}{e^{-\alpha} - 1}\right)$	$-\ln \frac{e^{-\alpha t} - 1}{e^{-\alpha} - 1}$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$
Gumbel	$\exp\left(-\left[(-\ln u)^\alpha + (\ln v)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right)$	$(-\ln t)^\alpha$	$[1, \infty)$

# Závislosti v koncích

- Různé kopuly pro 50% korelaci:



# Měření závislostí v koncích

- **Neparametrický odhad distribuční funkce na datech:**

$$K(z) = \Pr(Z_i \leq z)$$

**Kde:**  $Z_i = \frac{\text{pocet}[(X_i, Y_j) \text{ kde } X_j < X_i \text{ a } Y_j < Y_i]}{n-1}$

- **Parametrický odhad pro jednotlivé kopuly:**

$$K(z) = z - \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}$$

**Kde:**  $\varphi(z)$  - generátor

$\varphi'(z)$  - derivace generátoru



# Parametrické odhady

- **K(z) pro jednotlivé kopuly:**

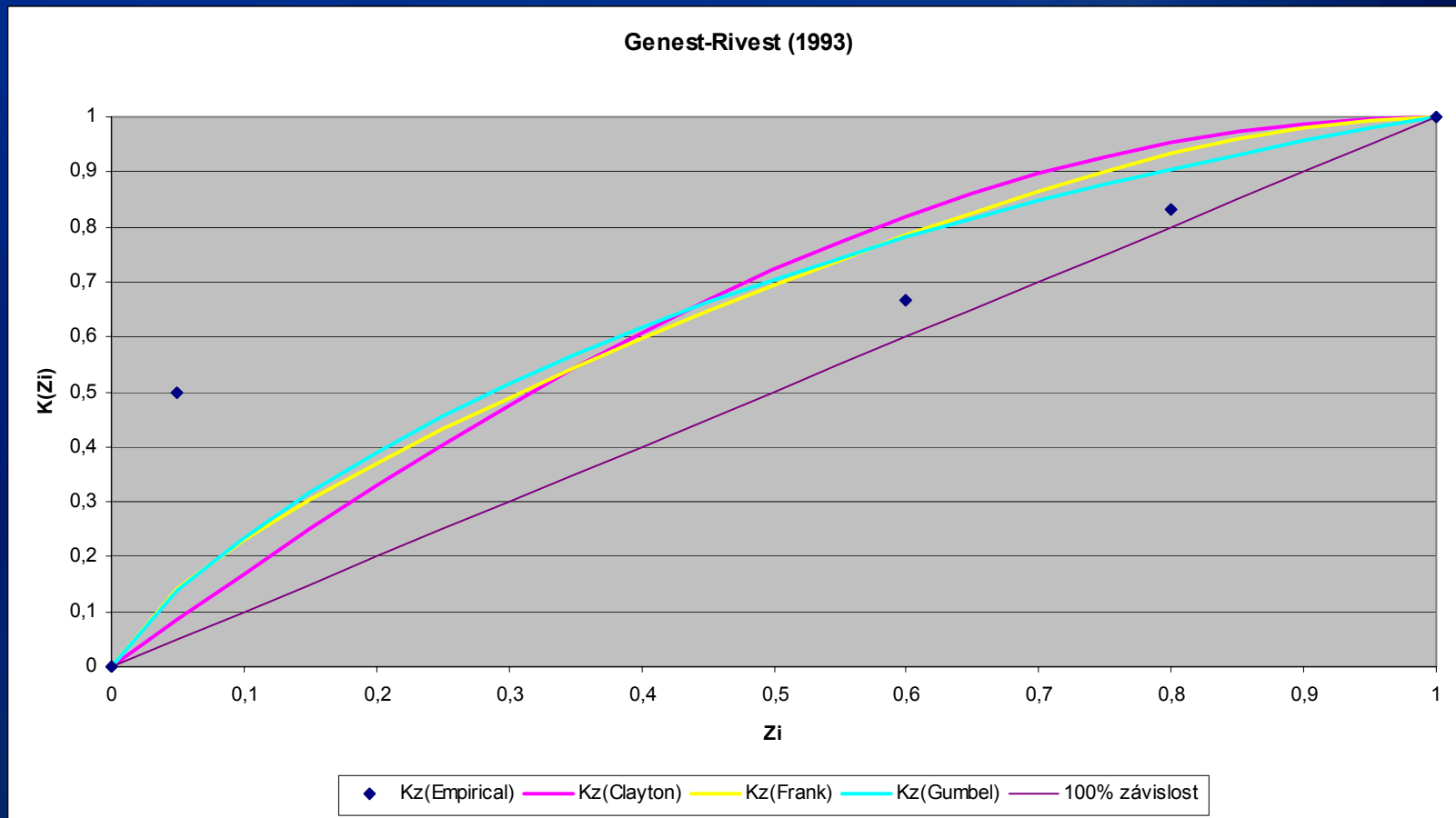
- Clayton: 
$$K(z) = \frac{z(1 + \alpha - z^\alpha)}{\alpha}$$

- Frank: 
$$K(z) = z - \frac{1 - e^{\alpha z}}{\alpha} \ln \left( \frac{1 - e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha z}} \right)$$

- Gumbel: 
$$K(z) = \frac{z(\alpha - \ln z)}{\alpha}$$

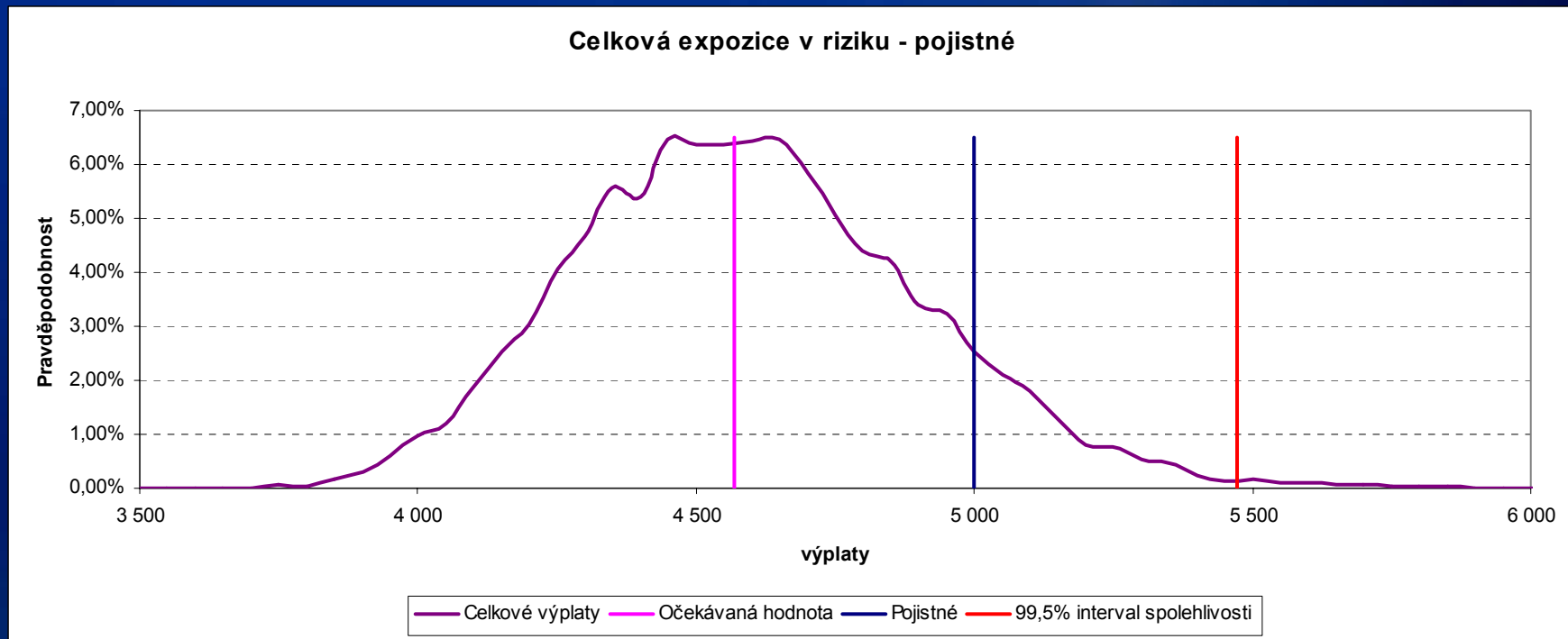
# Hodnocení závislostí v koncích

- Genest Rivest (1993):



# Pojistné: Celková simulace

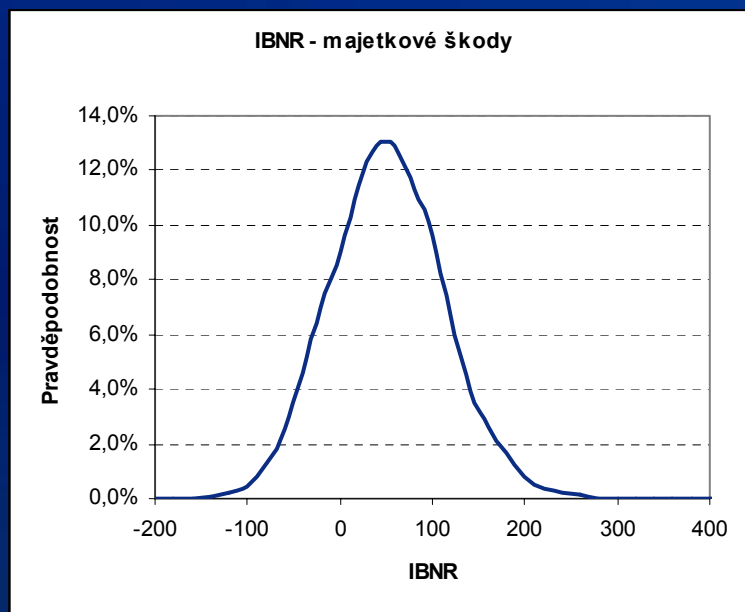
- RAROC:



# Odhad rezervy

# Rezervy: Majetkové škody - rekapitulace

- Standardní chain ladder
- Výsledky:



Kvantil	IBNR
$E(X)$	41,2
50%	40,5
75%	82,3
90%	119,5
95%	145,0
99,50%	211,9

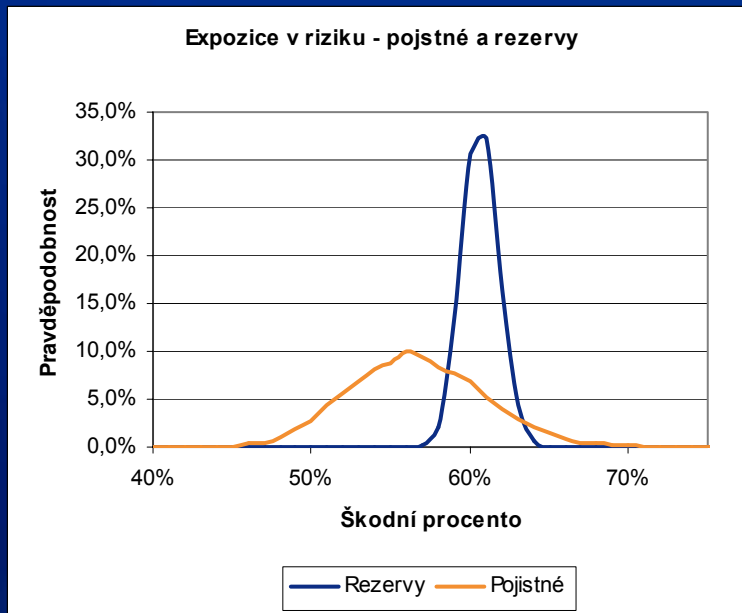
# Rezervy: Zdravotní škody 2000 - 2005

- Trojúhelník na počty škod – chain ladder x průměrná škoda

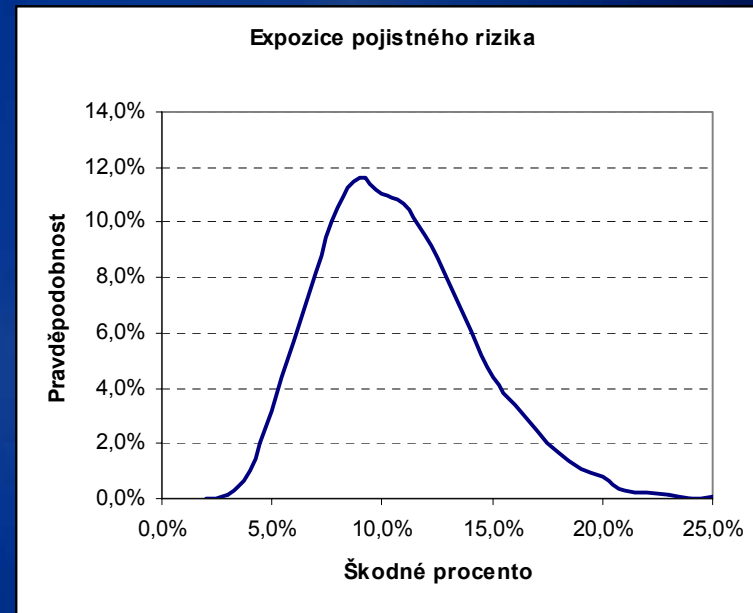
Rok	Neznámé škody	Průměrná škoda	IBNR rezerva
2000	0,9	10	9,4
2001	1,1	10	11,2
2002	0,9	10	8,8
2003	2,5	10	24,7
2004	3,8	10	37,8
2005	5,9	10	59,4

# Rezervy: Zdravotní škody 2006

- **Majetkové škody:**



- **Zdravotní škody:**



- **Korelace majetkové vs. zdravotní škody:**

# Rezervy: Zdravotní škody 2006

- **Využití korelace zdravotních a majetkových škod:**
  - Výsledky simulace v okolí očekávaného procenta:

Celkové škody	Známe	Neznáme	Průměrná škoda	IBNR rezerva
55,9	7	48,9	10	489

- **Stochastický přístup:**
  - Simulace počtu a výše škod – využití vztahu střední hodnoty a rozptylu u počtu škod



# Závěr

# Závěr

- **Co jsme odhadli?**
  - Předpověděli jsme objem zdravotních škod na základě vývoje majetkových škod
- **Důvody proč?**
  - Korelace mezi zdravotními a majetkovými škodami
  - Rozdílná doba likvidace mezi majetkovými a zdravotními škodami
  - Matematický aparát
    - Analýza zpoždění
    - Volba teoretického rozdělení
    - Korelační analýza
    - Volba agregační funkce
    - Monte Carlo simulace

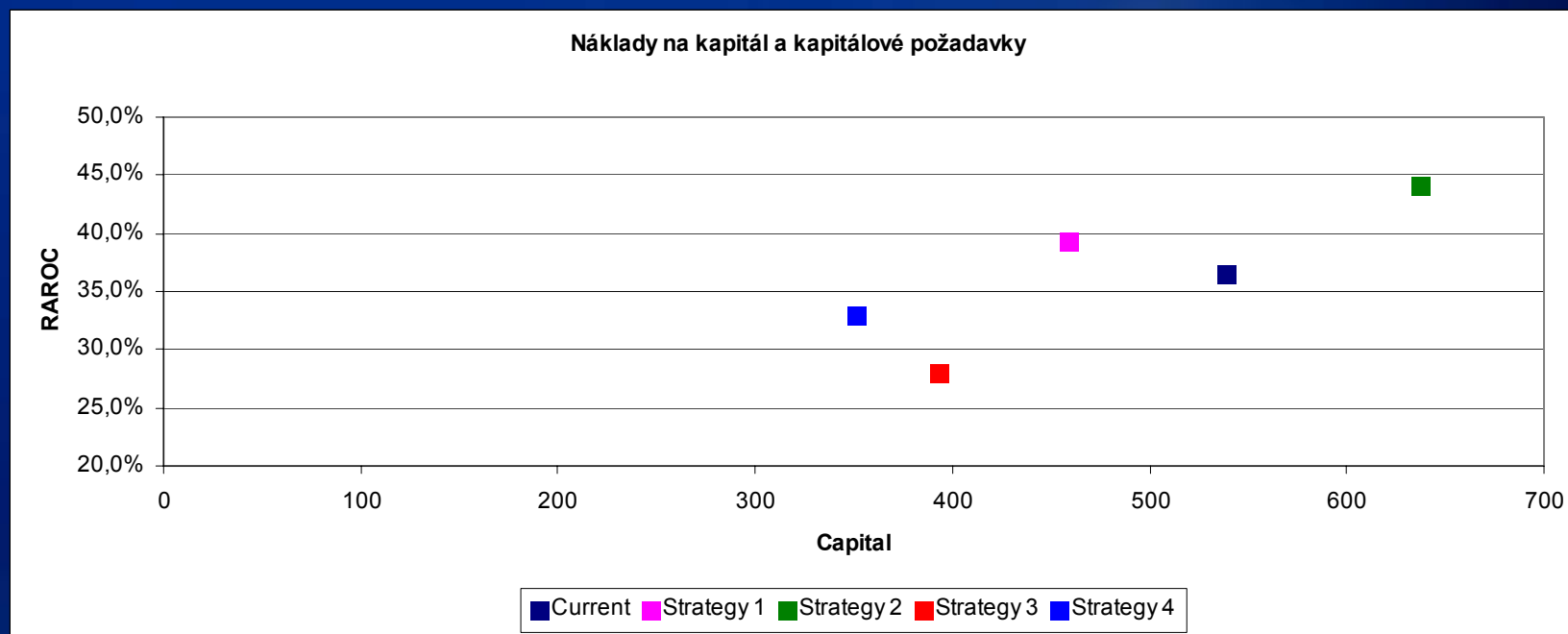
# Aplikace v praxi

---

- Data
- Matematický aparát
- Testování a kalibrace

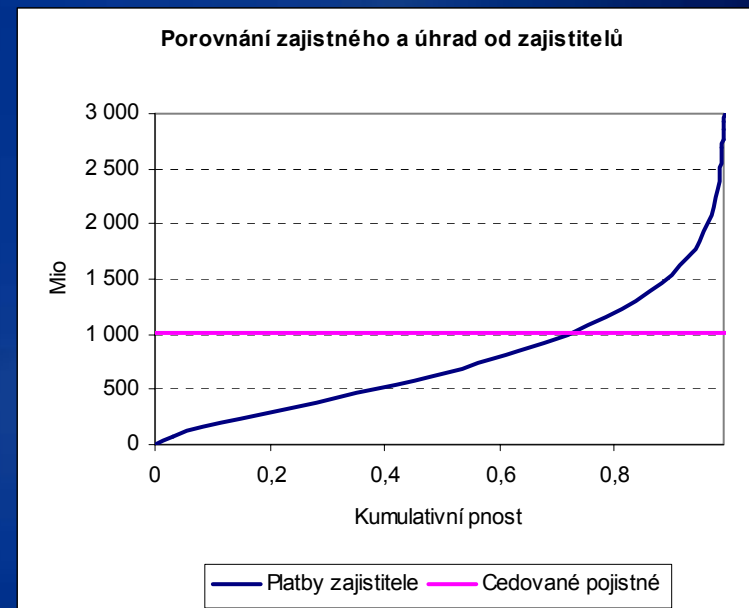
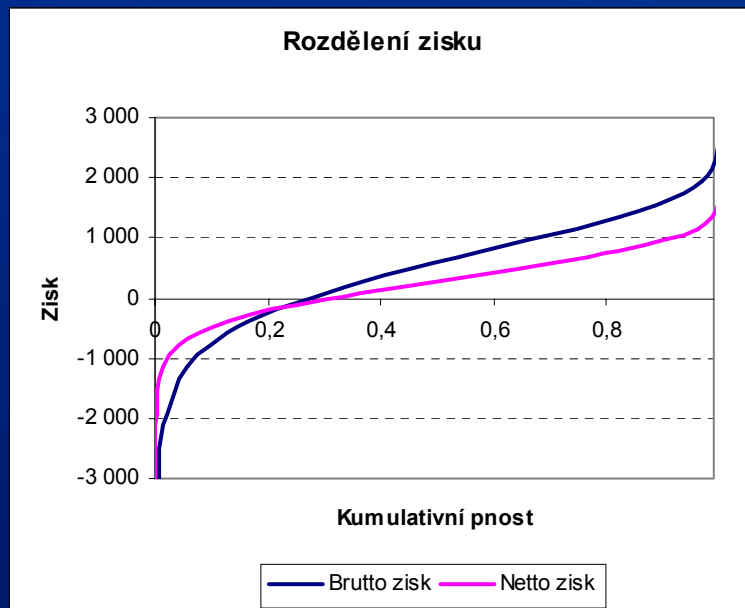
# Další využití

- Strategická analýza



# Další využití

- Hodnocení zajištného programu



- Tarifování produktů...



**Ondřej Bušta**

**KPMG Česká republika**

**+420 222 123 829**

**obusta@kpmg.cz**

**www.kpmg.cz**

The information contained herein is of a general nature and is not intended to address the circumstances of any particular individual or entity. Although we endeavor to provide accurate and timely information, there can be no guarantee that such information is accurate as of the date it is received or that it will continue to be accurate in the future. No one should act on such information without appropriate professional advice after a thorough examination of the particular situation. Informace zde obsažené jsou obecného charakteru a nejsou určeny k řešení situace konkrétní osoby či subjektu. Ačkoliv se snažíme zajistit, aby poskytované informace byly přesné a aktuální, nelze zaručit, že budou odpovídat skutečnosti k datu, ke kterému jsou doručeny, či že budou platné i v budoucnosti. Bez důkladného prošetření konkrétní situace a řádné odborné konzultace by neměla na základě těchto informací být činěna žádná opatření.