

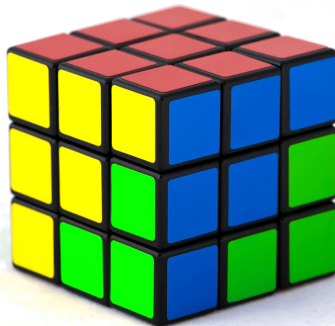
Riziko rezerv v neživotním pojištění
Srovnání několika metod výpočtu na
základě škodních trojúhelníků

Tomáš Petr

Actuarial & Insurance Solutions, Deloitte.

Seminář z aktuárských věd

30. března 2012



Úvod

Cílem přednášky je s využitím příkladů srovnat několik metod výpočtu na základě škodních trojúhelníků, použitelných v rámci standardní formule, USP či částečného interního modelu. To znamená:

- shrnout, co pokrývá riziko technických rezerv v neživotním pojištění podle Solventnosti II
- připomenout některé metody výpočtu škodních rezerv založených na škodních trojúhelnících
- na příkladu porovnat možnosti jejich použití pro riziko rezerv podle Solventnosti II

Obsah

- Solventnost II
- Projekce škod
- Metoda Chain-Ladder
- Mackova metoda chain-ladder
- Metoda Merz-Wüthrich
- Overdispersed Poisson
- Bootstrap
- Zpět k výpočtu rizik pro Solventnost II

Solventnost II

Solventnost II

Solventnost II zavádí novou Evropskou regulaci pojišťoven



- Direktiva Solventnost II schválená v listopadu 2009
- Implementační detaily: technická specifikace QIS5, návrh implementačních opatření druhé a třetí úrovně

Kapitál v SII



Požadavek na kapitál:

$$VaR_{99.5\%}(A(t+1) - L(t+1)) > 0$$

$$\Leftrightarrow (A(t) - L(t)) > SCR$$

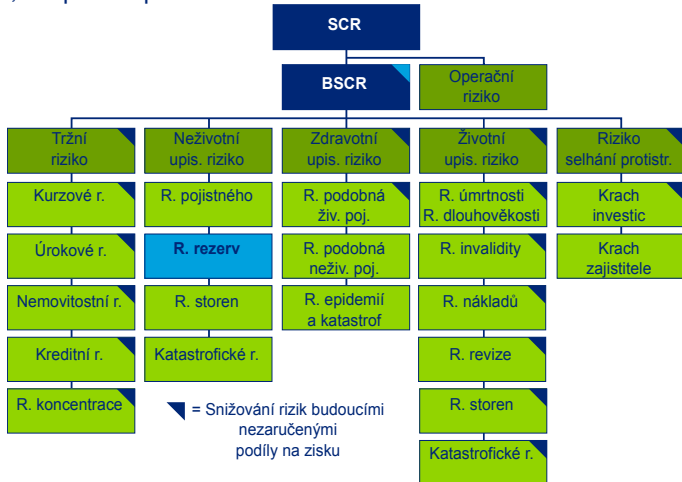
kde

- $A(t)$, $L(t)$ je nejlepší odhad (BE) hodnoty aktiv a závazků nyní
- $A(t+1)$, $L(t+1)$ je BE hodnota aktiv a závazků po roce
- $SCR = (A(t) - L(t)) - VaR_{99.5\%}(A(t+1) - L(t+1))$

Praktický výpočet SCR: jednotlivé skupiny rizik jsou obvykle nejprve počítány odděleně, až nakonec se přidá vliv vzájemných korelací.

Kapitálový požadavek

Teoreticky odpovídá výši kapitálu tak, aby kapitál po 1 roce neklesl pod 0 s 99,5% pravděpodobností



Neživotní riziko rezerv a pojistného

Výpočet rezerv podle SII =

- nejlepší odhad („BE“), očekávaná diskontovaná hodnota bud. peněžních toků
- + riziková přírážka, spočítaná jako náklad na kapitál („CoC“) na celku a pak (vč. vlivu diversifikace) rozpočítána zpět na odvětví

Riziko pojistného = riziko, že

- BE rezerva poj. na zač. roku + pojistné během roku + úroky < škody a náklady nastalé během roku + rezerva poj. na konci roku (vliv chyby odhadu nebo rozptylu daného procesu)

Riziko rezerv = riziko, že po 1 roce

- BE škodní rezerva se ukáže jako špatně odhadnutá (chyba odhadu)
- skutečné škody se odchýlí od očekávané střední hodnoty (procesní chyba)

Projekce škod

Přístupy k projekci škod:

Přístupy k projekci škod v neživotním pojištění obvykle spadají do jedné z následujících skupin:

Výpočet ze škodních trojúhelníků

- Data = souhrn škod po škodních a vývojových letech
- Odhaduje se celkový objem škod a zpoždění jejich vývoje
- Vhodné zejména pro dostatečně rozsáhlá a homogenní portfolia

Individuální projekce

- Data = individuální škody
- Odhaduje se počet škod, velikost jednotlivé škody, zpoždění hlášení, rezervování, (postupného) vyplácení
- Umožňuje detailnější modelování (velké/katastrofické škody s jinými vlastnostmi než malé, aplikace XL zajištění, ...)
- Náročné na odhady parametrů (dostatek dat) a výpočet (místo např. 100 buněk trojúhelníka může jít i o miliony škod)

Přístupy k projekci škod:

Přístupy k projekci škod v neživotním pojištění obvykle spadají do jedné z následujících skupin:

Výpočet ze škodních trojúhelníků

- Data = souhrn škod po škodních a vývojových letech
- Odhaduje se celkový objem škod a zpoždění jejich vývoje
- Vhodné zejména pro dostatečně rozsáhlá a homogenní portfolia

Individuální projekce

- Data = individuální škody
- Odhaduje se počet škod, velikost jednotlivé škody, zpoždění hlášení, rezervování, (postupného) vyplácení
- Umožňuje detailnější modelování (velké/katastrofické škody s jinými vlastnostmi než malé, aplikace XL zajištění, ...)
- Náročné na odhady parametrů (dostatek dat) a výpočet (místo např. 100 buněk trojúhelníka může jít i o miliony škod)

Přístupy k projekci škod:

Přístupy k projekci škod v neživotním pojištění obvykle spadají do jedné z následujících skupin:

Výpočet ze škodních trojúhelníků

- Data = souhrn škod po škodních a vývojových letech
- Odhaduje se celkový objem škod a zpoždění jejich vývoje
- Vhodné zejména pro dostatečně rozsáhlá a homogenní portfolia

Individuální projekce

- Data = individuální škody
- Odhaduje se počet škod, velikost jednotlivé škody, zpoždění hlášení, rezervování, (postupného) vyplácení
- Umožňuje detailnější modelování (velké/katastrofické škody s jinými vlastnostmi než malé, aplikace XL zajištění, ...)
- Náročné na odhady parametrů (dostatek dat) a výpočet (místo např. 100 buněk trojúhelníka může jít i o miliony škod)

Metoda Chain-Ladder

Předpoklady tradiční metody chain-ladder

Mějme **kumulativní** škodní trojúhelník $\{C_{ij}\}$.

	1	2	...	n
1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}
2	C_{21}	C_{22}	...	
⋮	⋮			
n	C_{n1}			
		f_1	...	f_{n-1}

Předpokládáme následující vztahy:

$$C_{i,j} \sim f_j C_{i,j-1},$$

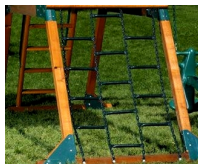
tzn. nárůst v každém vývojovém roce¹ j je podobný ve všech řádcích a osciluje kolem hodnoty dané vývojovým faktorem f_j .

¹ V prezentaci říkáme vývojový ‚rok‘, ale může jít o libovolnou jinou periodu

Shrnutí

- Vývojové faktory se odhadnou pomocí

$$\hat{f}_j = \sum_{i=1}^{n-k+1} C_{i,j} / \sum_{i=1}^{n-k+1} C_{i,j-1}$$



- Chain-ladder je notoricky známá metoda, ostatní metody se proti ní obvykle porovnávají.
- Použití kumulativních dat vyžaduje znát celou historii každého škodního roku (tzn. problematické, pokud chybí horní levý roh trojúhelníka).

Alternativa: např. aditivní metoda ILR

- Metoda je citlivá na data v rozích trojúhelníka (dolní levý určuje rezervu pro poslední škodní rok, horní pravý určuje chování na konci/tailu).

Alternativa: např. Bornhuetter-Ferguson, Mackova B.-F.

- Tradiční chain-ladder neposkytuje odhad rozptylu nebo chyby odhadu.

Alternativa: např. Mack C-L, Mack ILR, GLM metody - např. ODP

Shrnutí

- Vývojové faktory se odhadnou pomocí

$$\hat{f}_j = \sum_{i=1}^{n-k+1} C_{i,j} / \sum_{i=1}^{n-k+1} C_{i,j-1}$$



- Chain-ladder je notoricky známá metoda, ostatní metody se proti ní obvykle porovnávají.
- Použití kumulativních dat vyžaduje znát celou historii každého škodního roku (tzn. problematické, pokud chybí horní levý roh trojúhelníka).
Alternativa: např. aditivní metoda ILR
- Metoda je citlivá na data v rozích trojúhelníka (dolní levý určuje rezervu pro poslední škodní rok, horní pravý určuje chování na konci/tailu).
Alternativa: např. Bornhuetter-Ferguson, Mackova B.-F.
- Tradiční chain-ladder neposkytuje odhad rozptylu nebo chyby odhadu.
Alternativa: např. Mack C-L, Mack ILR, GLM metody - např. ODP

Shrnutí

- Vývojové faktory se odhadnou pomocí

$$\hat{f}_j = \sum_{i=1}^{n-k+1} C_{i,j} / \sum_{i=1}^{n-k+1} C_{i,j-1}$$



- Chain-ladder je notoricky známá metoda, ostatní metody se proti ní obvykle porovnávají.
- Použití kumulativních dat vyžaduje znát celou historii každého škodního roku (tzn. problematické, pokud chybí horní levý roh trojúhelníka).

Alternativa: např. aditivní metoda ILR

- Metoda je citlivá na data v rozích trojúhelníka (dolní levý určuje rezervu pro poslední škodní rok, horní pravý určuje chování na konci/tailu).

Alternativa: např. Bornhuetter-Ferguson, Mackova B.-F.

- Tradiční chain-ladder neposkytuje odhad rozptylu nebo chyby odhadu.

Alternativa: např. Mack C-L, Mack ILR, GLM metody - např. ODP

Shrnutí

- Vývojové faktory se odhadnou pomocí

$$\hat{f}_j = \sum_{i=1}^{n-k+1} C_{i,j} / \sum_{i=1}^{n-k+1} C_{i,j-1}$$



- Chain-ladder je notoricky známá metoda, ostatní metody se proti ní obvykle porovnávají.
- Použití kumulativních dat vyžaduje znát celou historii každého škodního roku (tzn. problematické, pokud chybí horní levý roh trojúhelníka).

Alternativa: např. aditivní metoda ILR

- Metoda je citlivá na data v rozích trojúhelníka (dolní levý určuje rezervu pro poslední škodní rok, horní pravý určuje chování na konci/tailu).

Alternativa: např. Bornhuetter-Ferguson, Mackova B.-F.

- Tradiční chain-ladder neposkytuje odhad rozptylu nebo chyby odhadu.

Alternativa: např. Mack C-L, Mack ILR, GLM metody - např. ODP

Shrnutí

- Vývojové faktory se odhadnou pomocí

$$\hat{f}_j = \sum_{i=1}^{n-k+1} C_{i,j} / \sum_{i=1}^{n-k+1} C_{i,j-1}$$



- Chain-ladder je notoricky známá metoda, ostatní metody se proti ní obvykle porovnávají.
- Použití kumulativních dat vyžaduje znát celou historii každého škodního roku (tzn. problematické, pokud chybí horní levý roh trojúhelníka).

Alternativa: např. aditivní metoda ILR

- Metoda je citlivá na data v rozích trojúhelníka (dolní levý určuje rezervu pro poslední škodní rok, horní pravý určuje chování na konci/tailu).

Alternativa: např. Bornhuetter-Ferguson, Mackova B.-F.

- Tradiční chain-ladder neposkytuje odhad rozptylu nebo chyby odhadu.

Alternativa: např. Mack C-L, Mack ILR, GLM metody - např. ODP

Mackova metoda chain-ladder



Předpoklady Mackovy metody

Chain-ladder předpoklady lze přirozeně rozšířit o chování rozptylu a formalizovat následovně:

Mackův chain-ladder model

1. Vývojové faktory:

$$E(C_{i,j} | C_{i1}, \dots, C_{ij}) = C_{i,j-1} f_j;$$

2. Nezávislost řádků:

$$\{C_{i1}, \dots, C_{in}\} \perp \{C_{j1}, \dots, C_{jn}\};$$

3. Rozptyl:

$$\text{Var}(C_{i,j} | C_{i1}, \dots, C_{ij}) = C_{i,j-1} \sigma_j^2.$$

Mackova metoda: odhad faktorů

Dáme-li každému pozorování $C_{i,j}/C_{i,j-1}$ a-priori váhu w_{ij} (např. s nižší vahou pro vychýlená pozorování), můžeme odhadnout:

- Vývojové faktory

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} w_{ij} C_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} w_{ij} C_{i,j-1}}$$

- Faktory rozptylu

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{d.f.} \sum_{i=1}^{n-j+1} \frac{w_{ij}}{C_{i,j-1}} (C_{ij} - \hat{f}_j C_{i,j-1})^2$$

kde *d.f.* je počet stupňů volnosti ($n - j$ jsou-li všechna $w_{ij} = 1$)

- Rozptyl vývojových faktorů

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{f}_j) = \hat{\sigma}_j^2 \sum_{i=1}^{n-j+1} w_{ij}^2 C_{i,j-1} / \left(\sum_{i=1}^{n-j+1} w_{ij} C_{i,j-1} \right)^2$$

Opět lze uvažovat o intra/extrapolaci odhadů zejm. na konci.



Kontrola odhadů

Chceme-li použít metodu chain-ladder, vývoj $C_{ij}/C_{i,j-1}$ v každém roce i by měl být ‚rozumně blízko‘ f_j . Když teď máme odhad rozptylu, můžeme se podívat na residua

$$r_{ij} = \left(\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} - \hat{f}_j \right) / \left(\frac{\hat{\sigma}_j}{\sqrt{C_{i,j-1}}} \right)$$

a zkontrolovat, jestli jejich rozdělení odpovídá rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem 1.

Mimo to můžeme residua později použít při bootstrapu:

- pro jednoduchost můžeme předpokládat, že rozdělení residuí je stejné ve všech škodních a vývojových letech
- projekce residuí při bootstrapu založíme na výběru z pozorovaných residuí (simulace z empirického rozdělení), nebo na výběru z jejich předpokládaného rozdělení

Odhad rezerv

Odhad střední hodnoty rezervy (BE) je stejný, jako při tradiční metodě chain-ladder:

- Konečná hodnota v roce i se odhadne roznásobením diagonály a vývojových faktorů představujících budoucí roky,

$$\hat{U}_i = \hat{C}_{i\infty} = C_{i,n-i+1} \prod_{j=n-i+2}^{\infty} \hat{f}_j$$

- Rezerva pokrývá projektovaný budoucí vývoj, $\hat{R}_i = \hat{U}_i - C_{i,n-i+1}$

Rozptyl rezerv

Za použití označení $\Delta = \{C_{ij}, i \leq n, j \leq n - i + 1\}$ můžeme vyjádřit odchylku výplat od odhadnuté rezervy v každém škodním roce:

$$E((\hat{R}_i - R_i)^2 | \Delta) = \underbrace{\text{Var}(C_{i\infty} | \Delta)}_{\text{rozptyl procesu}} + \underbrace{\text{Var}(\hat{C}_{i\infty} | \Delta)}_{\text{rozptyl odhadu}^2}$$

kde obě části můžeme odhadnout rekurzivně pomocí

- Rozptyl procesu (tzn. rozptyl náhodné veličiny C_{ij}):

$$\widehat{\text{Var}}(C_{ij} | \Delta) = \widehat{\text{Var}}(C_{i,j-1} | \Delta) \hat{f}_j^2 + \hat{C}_{i,j-1} \hat{\sigma}_j^2, \quad \widehat{\text{Var}}(C_{i,n-i+1} | \Delta) = 0$$

- Rozptyl odhadu (tzn. nakolik se odhadnutý průměr liší od teoretické střední hodnoty):

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{C}_{ij} | \Delta) = \widehat{\text{Var}}(\hat{C}_{i,j-1} | \Delta) \hat{f}_j^2 + \hat{C}_{i,j-1}^2 \widehat{\text{Var}}(\hat{f}_j | \Delta), \quad \widehat{\text{Var}}(\hat{C}_{i,n-i+1} | \Delta) = 0$$

²Přesněji, při použití tohoto odhadu bychom měli psát $\text{Var}(\hat{C}_{ij} | C_{ij}, i + j < n, j \leq i)$ místo $\text{Var}(\hat{C}_{ij} | \Delta)$ - viz detaily.



Rozptyl celkové rezervy

Rozptyl celé rezervy $\hat{R} = \sum_{i=1}^n \hat{R}_i$ lze odhadnout pomocí

- Rozptyl procesu: díky nezávislosti řádků je

$$\widehat{\text{Var}}(R|\Delta) = \sum_{i=1}^n \widehat{\text{Var}}(R_i|\Delta)$$

- Rozptyl odhadu: jednotlivé odhady \hat{R}_i nejsou nezávislé, neboť jsou spočítané ze stejných pozorování, takže je třeba dopočítat rekurzivně

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{R}|\Delta) = \widehat{\text{Var}}(\hat{C}_{>,\infty}|\Delta) \text{ kde}$$

$$\hat{C}_{>,j} = \sum_{i=n+2-j}^n \hat{C}_{i,j}, \quad \hat{C}_{\geq,j-1} = \sum_{i=n+2-j}^n \hat{C}_{i,j-1}$$

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{C}_{>,j}|\Delta) = \widehat{\text{Var}}(\hat{C}_{>,j-1}|\Delta) \hat{f}_k^2 + \hat{C}_{\geq,j-1}^2 \widehat{\text{Var}}(\hat{f}_j|\Delta)$$

Pozn.: podobně lze uvažovat i o kovariancích rezerv různých odvětví – viz např. [Merz & Wüthrich 2008]

Projekce

Z uvedených odhadů můžeme získat chybu danou rozptylem procesu, chybu odhadu a celkovou chybu předpovědi

$$proc.e.(R) = \sqrt{\widehat{\text{Var}}(R|\Delta)}, \quad estim.e.(R) = \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{R}|\Delta)}$$

$$pred.e.(R) = \sqrt{\widehat{\text{Var}}(R|\Delta) + \widehat{\text{Var}}(\hat{R}|\Delta)}$$

a použít je ke konstrukci intervalu spolehlivosti - s pravděpodobností α můžeme říct, že

$$\begin{aligned} R &\in \langle E(R|\Delta) \pm q_\alpha proc.e.(R) \rangle \\ E(R|\Delta) &\in \langle \hat{R} \pm q_\alpha estim.e.(R) \rangle \\ R &\in \langle \hat{R} \pm q_\alpha pred.e.(R) \rangle \end{aligned}$$

kde q_α je kvantil vhodného rozdělení (pro jednoduchost se často používá normální rozdělení).

Shrnutí

- **Mackova metoda je přirozené rozšíření metody chain-ladder.**
- To znamená, že dává stejný odhad střední hodnoty, ale také že má podobné vlastnosti (např. citlivost na data v rozích trojúhelníka).
- K odvození odhadu rozptylu není použit žádný předpoklad rozdělení; lze ale ukázat, že výsledky jsou stejné, jako při použití předpokladu normálního rozdělení. Jiné metody mohou být vhodnější, je-li třeba modelovat těžší chvosty (fat-tail).
Alternativa: např. GLM metody s vhodným předpokládaným rozdělením
- Uvedené odhady udávají celkový rozptyl rezervy po skončení vývoje, ne po 1 roce jak požaduje SII.
Alternativa: Merz-Wüthrich

Shrnutí

- Mackova metoda je přirozené rozšíření metody chain-ladder.
- To znamená, že dává stejný odhad střední hodnoty, ale také že má podobné vlastnosti (např. citlivost na data v rozích trojúhelníka).
- K odvození odhadu rozptylu není použit žádný předpoklad rozdělení; lze ale ukázat, že výsledky jsou stejné, jako při použití předpokladu normálního rozdělení. Jiné metody mohou být vhodnější, je-li třeba modelovat těžší chvosty (fat-tail).
Alternativa: např. GLM metody s vhodným předpokládaným rozdělením
- Uvedené odhady udávají celkový rozptyl rezervy po skončení vývoje, ne po 1 roce jak požaduje SII.
Alternativa: Merz-Wüthrich

Shrnutí

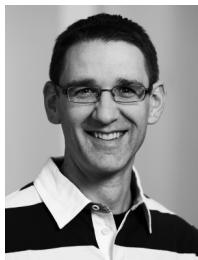
- Mackova metoda je přirozené rozšíření metody chain-ladder.
- To znamená, že dává stejný odhad střední hodnoty, ale také že má podobné vlastnosti (např. citlivost na data v rozích trojúhelníka).
- K odvození odhadu rozptylu není použit žádný předpoklad rozdělení; lze ale ukázat, že výsledky jsou stejné, jako při použití předpokladu normálního rozdělení. Jiné metody mohou být vhodnější, je-li třeba modelovat těžší chvosty (fat-tail).
Alternativa: např. GLM metody s vhodným předpokládaným rozdělením
- Uvedené odhady udávají celkový rozptyl rezervy po skončení vývoje, ne po 1 roce jak požaduje SII.
Alternativa: Merz-Wüthrich

Shrnutí

- Mackova metoda je přirozené rozšíření metody chain-ladder.
- To znamená, že dává stejný odhad střední hodnoty, ale také že má podobné vlastnosti (např. citlivost na data v rozích trojúhelníka).
- K odvození odhadu rozptylu není použit žádný předpoklad rozdělení; lze ale ukázat, že výsledky jsou stejné, jako při použití předpokladu normálního rozdělení. Jiné metody mohou být vhodnější, je-li třeba modelovat těžší chvosty (fat-tail).
Alternativa: např. GLM metody s vhodným předpokládaným rozdělením
- Uvedené odhady udávají celkový rozptyl rezervy po skončení vývoje, ne po 1 roce jak požaduje SII.
Alternativa: Merz-Wüthrich

Metoda Merz-Wüthrich

Roční run-off



Mackova metoda dovoluje spočítat odchylku rezervy a konečné výše škod – pro Solventnost II ale potřebujeme rozptyl run-offu pouze po 1 roce.

Označíme-li \hat{R}_i^{t+1} , \hat{C}_{ij}^{t+1} odhady rezervy a výplat příští rok a $Y_{i,n-i+2} = C_{i,n-i+2} - C_{i,n-i+1}$ skutečné výplaty příští rok, pak run-off po 1 roce je

$$Roff_i = \hat{R}_i - (Y_{i,n-i+2} + \hat{R}_i^{t+1}) = \hat{C}_{i\infty} - \hat{C}_{i\infty}^{t+1} .$$

- Zatímco střední hodnota run-offu (pohledem nyní) je zřejmě 0, rozptyl se musí dopočítat o něco složitěji než u Mackovy metody.
- Kontrola: tento rozptyl ročního run-offu by měl být vždy menší, než Mackův rozptyl úplného run-offu.

Rozptyl run-offu

V ideálním případě by platilo $\hat{C}_{i\infty} = E(C_{i\infty}|\Delta)$ a pak by rozptyl byl:

$$\text{Var}(E(C_{i\infty}|\Delta) - E(C_{i\infty}|\Delta^{t+1}) | \Delta) = (E(C_{i\infty}|\Delta))^2 \psi_i.$$

kde značíme:

$$\psi_i = \frac{\sigma_{n-i+2}^2 / \hat{f}_{n-i+2}^2}{C_{i,n-i+1}}$$

$$\phi_i = \frac{\hat{\sigma}_{n-i+2}^2 / \hat{f}_{n-i+2}^2}{\sum_{k=1}^{i-1} C_{k,n-i+1}} + \sum_{j=n-i+2}^{\infty} \frac{C_{n-j+1,j}}{\sum_{k=1}^{n-j+1} C_{k,j}} \frac{\hat{\sigma}_{j+1}^2 / \hat{f}_{j+1}^2}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{k,j}}$$

Ve skutečnosti ale musíme počítat i s chybou odhadu:

$$\text{Var}(Roff_i|\Delta) = (\hat{C}_{i\infty})^2 (\psi_i + \phi_i)$$

Celkový rozptyl je pak

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n Roff_i \mid \Delta\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(Roff_i|\Delta) + 2 \sum_{i < k} \hat{C}_{i\infty} \hat{C}_{k\infty} \phi_i$$



Overdispersed Poisson

Předpoklady

Jako obvykle začneme **nekumulativním** škodním trojúhelníkem $\{Y_{ij}\}$.

	1	2	...	n
1	Y_{11}	Y_{12}	...	Y_{1n}
2	Y_{21}	Y_{22}	...	
⋮	⋮			
n	Y_{n1}			

Škody popisuje tzv. over-dispersed Poisson model (“ODP”):

$$E Y_{ij} = \mu_{ij} = e^{\eta_{ij}}, \quad \text{Var}(Y_{ij}) = \phi \mu_{ij},$$

$$\eta_{ij} = m + r_i + c_j = \text{konst.} + \text{vliv řádku} + \text{vliv sloupce.}$$

Y_{ij} a Y_{kl} jsou nezávislé pro $i \neq k \vee j \neq l$.

Parametry



- V maticové formě budeme psát $\eta = X\beta$, kde $\beta = (m, r_1, \dots, c_n)$ a X je matice, která má nuly a jedničky na správných místech.
- Položíme $r_1 = c_1 = 0$. (Jinak by model byl přeparametrizovaný – X by neměla plnou hodnotu.)
- Parametry chceme odhadnout metodou maximální věrohodnosti \Rightarrow potřebujeme vyřešit:

$$0 = \frac{d\ell}{d\beta_k} = \sum_{ij} \frac{1}{\phi W_z(ij)} (Y_{ij} - \mu_{ij}) \frac{d\eta_{ij}}{d\mu_{ij}} x_{ij,k},$$

kde $W_z(ij) = \frac{1}{w_{ij}} \mu_{ij} \left(\frac{d\eta_{ij}}{d\mu_{ij}} \right)^2$ a w_{ij} jsou a-priori váhy dané jednotlivým pozorováním – výchozí hodnota vah je 1.



Tento vzorec vypadá obdobně jako věrohodnostní funkce lineární regrese – toho můžeme využít a aplikovat mechanismy a postupy známé z lineární regrese.

Parametry



- V maticové formě budeme psát $\eta = X\beta$, kde $\beta = (m, r_1, \dots, c_n)$ a X je matice, která má nuly a jedničky na správných místech.
- Položíme $r_1 = c_1 = 0$. (Jinak by model byl přeparametrizovaný – X by neměla plnou hodnotu.)
- Parametry chceme odhadnout metodou maximální věrohodnosti \Rightarrow potřebujeme vyřešit:

$$0 = \frac{d\ell}{d\beta_k} = \sum_{ij} \frac{1}{\phi W_z(ij)} (Y_{ij} - \mu_{ij}) \frac{d\eta_{ij}}{d\mu_{ij}} x_{ij,k},$$

kde $W_z(ij) = \frac{1}{w_{ij}} \mu_{ij} \left(\frac{d\eta_{ij}}{d\mu_{ij}} \right)^2$ a w_{ij} jsou a-priori váhy dané jednotlivým pozorováním – výchozí hodnota vah je 1.



Tento vzorec vypadá obdobně jako věrohodnostní funkce lineární regrese – toho můžeme využít a aplikovat mechanismy a postupy známé z lineární regrese.

Parametry



- V maticové formě budeme psát $\eta = X\beta$, kde $\beta = (m, r_1, \dots, c_n)$ a X je matice, která má nuly a jedničky na správných místech.
- Položíme $r_1 = c_1 = 0$. (Jinak by model byl přeparametrizovaný – X by neměla plnou hodnotu.)
- Parametry chceme odhadnout metodou maximální věrohodnosti \Rightarrow potřebujeme vyřešit:

$$0 = \frac{d\ell}{d\beta_k} = \sum_{ij} \frac{1}{\phi W_z(ij)} (Y_{ij} - \mu_{ij}) \frac{d\eta_{ij}}{d\mu_{ij}} x_{ij,k},$$

kde $W_z(ij) = \frac{1}{w_{ij}} \mu_{ij} \left(\frac{d\eta_{ij}}{d\mu_{ij}} \right)^2$ a w_{ij} jsou a-priori váhy dané jednotlivým pozorováním – výchozí hodnota vah je 1.



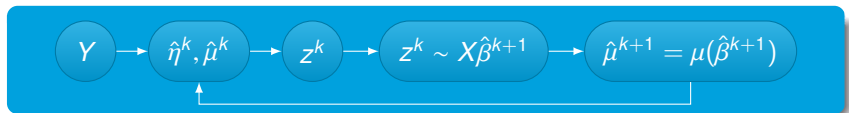
Tento vzorec vypadá obdobně jako věrohodnostní funkce lineární regrese – toho můžeme využít a aplikovat mechanismy a postupy známé z lineární regrese.

Numerické řešení

- Označme

$$z = \eta + (Y - \mu) \frac{d\eta}{d\mu}.$$

- Pokud bychom měli pevné μ , mohli bychom lineární regresí odhadnout $\eta = X\beta$ na základě pozorování z . V našem případě je ale μ funkcí η , takže musíme tento postup použít iterativně.



- Pokud tato procedura konverguje, pak řešení $\hat{\beta}$ je také řešením našeho původního GLM problému (maximalizace věrohodnosti na minulé straně).



Predikce

- Necht' F je matice popisující budoucí závislosti (podobně jako X ty minulé) a $Y^F = \{Y_{ij}, i + j > n + 1\}$ jsou budoucí buňky trojúhelníka. Pak můžeme odhadnout

$$\hat{Y}^F = e^{F\hat{\beta}}.$$

- Parametr rozptylu ϕ můžeme odhadnout pomocí

$$\hat{\phi} = \sum_{ij} \frac{(Y_{ij} - \mu_{ij})^2}{\mu_{ij}} / (n - p) \sim \phi \chi_{n-p}^2.$$

p je počet parametrů (délka vektoru β) a tento odhad má asymptoticky výše uvedené χ^2 rozdělení.

Predikce

- Necht' F je matice popisující budoucí závislosti (podobně jako X ty minulé) a $Y^F = \{Y_{ij}, i + j > n + 1\}$ jsou budoucí buňky trojúhelníka. Pak můžeme odhadnout

$$\hat{Y}^F = e^{F\hat{\beta}}.$$

- Parametr rozptylu ϕ můžeme odhadnout pomocí

$$\hat{\phi} = \sum_{ij} \frac{(Y_{ij} - \mu_{ij})^2}{\mu_{ij}} / (n - p) \sim \phi \chi_{n-p}^2.$$

p je počet parametrů (délka vektoru β) a tento odhad má asymptoticky výše uvedené χ^2 rozdělení.

Odhad odchylek

- Protože rezerva je $R_i = \sum_{j=n-i+2}^n Y_{ij}$, dostáváme

$$E(R_i - \hat{R}_i)^2 = E\left(\sum_{j=n-i+2}^n Y_{ij} - \hat{Y}_{ij}\right)^2.$$

- Odchylku skutečných budoucích škod od jejich odhadu lze opět rozdělit na dvě části

$$E(Y_{ij} - \hat{Y}_{ij})^2 = \underbrace{\text{Var}(Y_{ij})}_{\text{rozptyl procesu}} + \underbrace{\text{Var}(\hat{Y}_{ij})}_{\text{rozptyl odhadu}}$$

- Tyto části můžeme odhadnout pomocí

$$\widehat{\text{Var}}(Y^F) = \hat{\phi} \hat{\mu}, \quad \widehat{\text{Var}}(\hat{Y}^F) = \hat{\phi} M F (X^T W_z^{-1} X)^{-1} F^T M,$$

kde $M = \text{diag}(\hat{\mu})$.



Shrnutí

- Tento konkrétní ODP model dává stejný odhad rezervy (střední hodnoty škod) jako chain-ladder.

$$f_n = \frac{e^{c_1} + \dots + e^{c_{n-1}} + e^{c_n}}{e^{c_1} + \dots + e^{c_{n-1}}}$$

- Navíc dostáváme odhad rozptylu.
- Oproti Mackovu modelu dostáváme jiné rozdělení škod. Mackův model je odvozen bez použití předpokladu o rozdělení; dá se ale ukázat, že stejné výsledky jako v Mackově modelu bychom dostali při užití metody maximální věrohodnosti a normálního rozdělení. Oproti tomu tento ODP model používá (možná realističtější?) rozdělení odvozené z Poissonova rozdělení (dovoluje modelovat o něco těžší chvosty).
- Odvození ODP vyžaduje, aby součet škod ve všech sloupcích inkrementálního trojúhelníka byl nezáporný.

Shrnutí

- Tento konkrétní ODP model dává stejný odhad rezervy (střední hodnoty škod) jako chain-ladder.

$$f_n = \frac{e^{c_1} + \dots + e^{c_{n-1}} + e^{c_n}}{e^{c_1} + \dots + e^{c_{n-1}}}$$

- Navíc dostáváme odhad rozptylu.
- Oproti Mackovu modelu dostáváme jiné rozdělení škod. Mackův model je odvozen bez použití předpokladu o rozdělení; dá se ale ukázat, že stejné výsledky jako v Mackově modelu bychom dostali při užití metody maximální věrohodnosti a normálního rozdělení. Oproti tomu tento ODP model používá (možná realističtější?) rozdělení odvozené z Poissonova rozdělení (dovoluje modelovat o něco těžší chvosty).
- Odvození ODP vyžaduje, aby součet škod ve všech sloupcích inkrementálního trojúhelníka byl nezáporný.

Shrnutí

- Tento konkrétní ODP model dává stejný odhad rezervy (střední hodnoty škod) jako chain-ladder.

$$f_n = \frac{e^{c_1} + \dots + e^{c_{n-1}} + e^{c_n}}{e^{c_1} + \dots + e^{c_{n-1}}}$$

- Navíc dostáváme odhad rozptylu.
- Oproti Mackovu modelu dostáváme jiné rozdělení škod. Mackův model je odvozen bez použití předpokladu o rozdělení; dá se ale ukázat, že stejné výsledky jako v Mackově modelu bychom dostali při užití metody maximální věrohodnosti a normálního rozdělení. Oproti tomu tento ODP model používá (možná realističtější?) rozdělení odvozené z Poissonova rozdělení (dovoluje modelovat o něco těžší chvosty).
- Odvození ODP vyžaduje, aby součet škod ve všech sloupcích inkrementálního trojúhelníka byl nezáporný.

Shrnutí

- Tento konkrétní ODP model dává stejný odhad rezervy (střední hodnoty škod) jako chain-ladder.

$$f_n = \frac{e^{c_1} + \dots + e^{c_{n-1}} + e^{c_n}}{e^{c_1} + \dots + e^{c_{n-1}}}$$

- Navíc dostáváme odhad rozptylu.
- Oproti Mackovu modelu dostáváme jiné rozdělení škod. Mackův model je odvozen bez použití předpokladu o rozdělení; dá se ale ukázat, že stejné výsledky jako v Mackově modelu bychom dostali při užití metody maximální věrohodnosti a normálního rozdělení. Oproti tomu tento ODP model používá (možná realističtější?) rozdělení odvozené z Poissonova rozdělení (dovoluje modelovat o něco těžší chvosty).
- Odvození ODP vyžaduje, aby součet škod ve všech sloupcích inkrementálního trojúhelníka byl nezáporný.

Bootstrap

Bootstrap



Baron Prášil:

*“Vytáhl jsem se za řemínky u bot.”
(i když v české verzi za cop)*

Poslední metodou kterou použijeme je bootstrap. Analytické metody obvykle poskytují přímočarý odhad střední hodnoty, ale

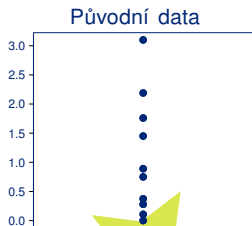
- odhady rozptylu jsou obvykle komplikovanější
- další vlastnosti rozdělení (např. kvantil rezerv, rozptyl run-offu po n letech, nelineární transformace – např. zajištění, ...) se často nedají odhadnout analyticky

Řešení:

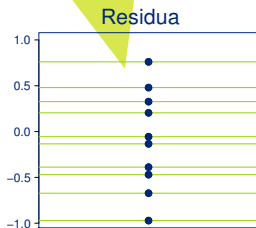
Hodíme data do stroje, provedeme tisíce simulací a doufáme, že z něj vypadne odpověď.³

³Odpověď: 42. Ale počkat – jaká byla otázka? ([Adams 1979])

Bootstrap – princip

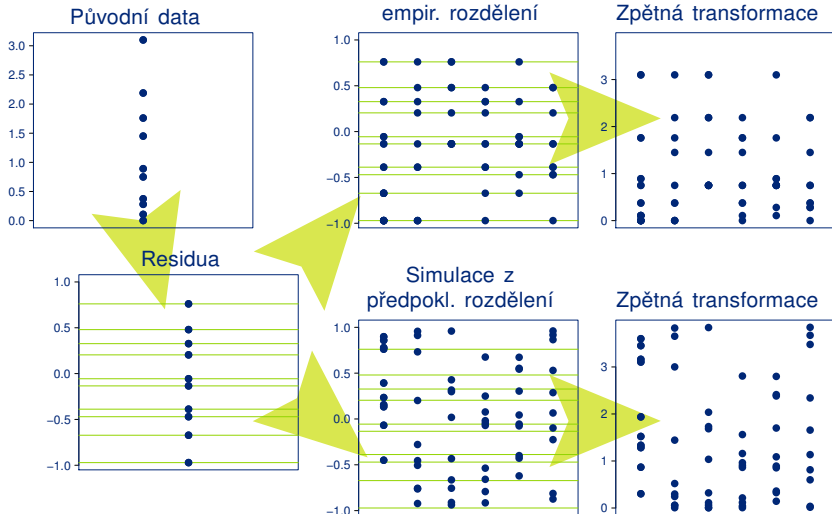


Pozorovaná data v jejich
původním rozdělení



Převědono na stejně
rozdělená residua,
s $\mu = 0$, $\sigma = 1$

Bootstrap – princip



Zpět k výpočtu rizik pro Solventnost II

Neživotní riziko rezerv

Oproti životním rizikům nabízí SII pro výpočet neživotních rizik širší výběr metod co se obtížnosti výpočtu týče:

- Standardní vzorec: založen na BE pojistného a rezerv, které jsou pouze vynásobeny poskytnutými standardními faktory rozptylu
- Parametry specifické pro pojišťovnu („USP“): faktory rozptylu pro danou pojišťovnu odhadnuty z vlastních dat pomocí jedné z doporučených metod (je třeba dostatek historických dat)
- Interní model: plná projekce budoucích peněžních toků; možná struktura např.:
 - Běžné škody - simulační/bootstrap metody používající škodní trojúhelníky (příklady i v této přednášce)
 - Velké škody - projekce frekvence a závažnosti jednotlivých škod, umožňující např. výpočet XL zajištění každé škody, apod.
 - Katastrofy - simulace nebo scénáře, často připravené ve spolupráci se zajistiteli, kteří mají více dat a zkušeností s katastrofami

Praktická poznámka k výpočtu rizika

Proč se vůbec namáhat s něčím jiným než standardní vzorec?
Mějme 3 společnosti mající podobná portfolia:

Společnost	BE rezerv	Std. odch. run-offu
1. Good	80	40
2. Bad	80	80
3. Ugly	50 (špatný odhad)	80

- Std. vzorec: společnosti 1, 2 mají stejné SCR = $\rho(\sigma_{std}) \times 80$
- USP nebo interní model: mohou ukázat rozdíl mezi společnostmi 1 a 2; interní model by ideálně měl postihnout i situaci, kdy rozptyl (a tedy USP) jsou stejné, ale 99,5% kvantil nikoliv
- Pokud dohled neodhalí nepřesnosti v BE rezervě u společnosti 3, tak její SCR je nejnižší. . .

Příklad

Na příkladu jednoho šk. trojúhelníka odvodíme BE šk. rezervu (metodou chain-ladder) a srovnáme následující posupy výpočtu rizika:

- Standardní vzorec
 - 1a. Výpočet podle QIS5 s parametry pro poj. odpovědnosti
 - 1b. Výpočet podle návrhu L2 opatření s parametry pro poj. odpovědnosti
- Parametry specifické pro společnost, metody podle QIS5
 - 2a. Odhad rozptylu run-offu z historických run-offů
 - 2b. Merz-Wüthrichova metoda odhadu rozptylu 1-ročního run-offu, používající BE odhad rezerv
 - 2c. Merz-Wüthrichova metoda odhadu rozptylu 1-ročního run-offu, výslovně používající C-L odhad rezerv (to samé, pokud BE = C-L odhad)
- Vlastní odvození rozptylu 1-ročního run-offu bootstrapem
 - 3a. Mackova metoda
 - 3b. Overdispersed Poisson metoda, konstantní parametr rozptylu ϕ
- Odvození 99,5% kvantilu (bootstrap)
 - 4a. Mackova metoda odhadu rozptylu + empirické rozdělení residuí
 - 4b. Overdispersed Poisson metoda + negativně binomické rozdělení residuí

Příklad

Na příkladu jednoho šk. trojúhelníka odvodíme BE šk. rezervu (metodou chain-ladder) a srovnáme následující posupy výpočtu rizika:

- Standardní vzorec
 - 1a. Výpočet podle QIS5 s parametry pro poj. odpovědnosti
 - 1b. Výpočet podle návrhu L2 opatření s parametry pro poj. odpovědnosti
- Parametry specifické pro společnost, metody podle QIS5
 - 2a. Odhad rozptylu run-offu z historických run-offů
 - 2b. Merz-Wüthrichova metoda odhadu rozptylu 1-ročního run-offu, používající BE odhad rezerv
 - 2c. Merz-Wüthrichova metoda odhadu rozptylu 1-ročního run-offu, výslovně používající C-L odhad rezerv (to samé, pokud BE = C-L odhad)
- Vlastní odvození rozptylu 1-ročního run-offu bootstrapem
 - 3a. Mackova metoda
 - 3b. Overdispersed Poisson metoda, konstantní parametr rozptylu ϕ
- Odvození 99,5% kvantilu (bootstrap)
 - 4a. Mackova metoda odhadu rozptylu + empirické rozdělení residuí
 - 4b. Overdispersed Poisson metoda + negativně binomické rozdělení residuí

Příklad

Na příkladu jednoho šk. trojúhelníka odvodíme BE šk. rezervu (metodou chain-ladder) a srovnáme následující posupy výpočtu rizika:

- Standardní vzorec
 - 1a. Výpočet podle QIS5 s parametry pro poj. odpovědnosti
 - 1b. Výpočet podle návrhu L2 opatření s parametry pro poj. odpovědnosti
- Parametry specifické pro společnost, metody podle QIS5
 - 2a. Odhad rozptylu run-offu z historických run-offů
 - 2b. Merz-Wüthrichova metoda odhadu rozptylu 1-ročního run-offu, používající BE odhad rezerv
 - 2c. Merz-Wüthrichova metoda odhadu rozptylu 1-ročního run-offu, výslovně používající C-L odhad rezerv (to samé, pokud BE = C-L odhad)
- Vlastní odvození rozptylu 1-ročního run-offu bootstrapem
 - 3a. Mackova metoda
 - 3b. Overdispersed Poisson metoda, konstantní parametr rozptylu ϕ
- Odvození 99,5% kvantilu (bootstrap)
 - 4a. Mackova metoda odhadu rozptylu + empirické rozdělení residuí
 - 4b. Overdispersed Poisson metoda + negativně binomické rozdělení residuí

Příklad

Na příkladu jednoho šk. trojúhelníka odvodíme BE šk. rezervu (metodou chain-ladder) a srovnáme následující posupy výpočtu rizika:

- Standardní vzorec
 - 1a. Výpočet podle QIS5 s parametry pro poj. odpovědnosti
 - 1b. Výpočet podle návrhu L2 opatření s parametry pro poj. odpovědnosti
- Parametry specifické pro společnost, metody podle QIS5
 - 2a. Odhad rozptylu run-offu z historických run-offů
 - 2b. Merz-Wüthrichova metoda odhadu rozptylu 1-ročního run-offu, používající BE odhad rezerv
 - 2c. Merz-Wüthrichova metoda odhadu rozptylu 1-ročního run-offu, výslovně používající C-L odhad rezerv (to samé, pokud BE = C-L odhad)
- Vlastní odvození rozptylu 1-ročního run-offu bootstrapem
 - 3a. Mackova metoda
 - 3b. Overdispersed Poisson metoda, konstantní parametr rozptylu ϕ
- Odvození 99,5% kvantilu (bootstrap)
 - 4a. Mackova metoda odhadu rozptylu + empirické rozdělení residuí
 - 4b. Overdispersed Poisson metoda + negativně binomické rozdělení residuí

Výsledky příkladu

Výsledky porovnání jednotlivých metod: viz Excel

BE reserve		Reserve risk (99.5% quantile, or mean+SCR)								
Origin (accident year)	1a) QI55	1b) L2 draft	2a) USP 1	2b) USP 2	2c) USP 3	3a) Mack variance	3b) ODP variance	4a) Mack bootstr.	4b) ODP bootstr.	
1	0	0	0	0	0	0	2,343	0	1,518	0
2	12 292	16 207	16 348	17 287	15 082	15 082	15 606	18 734	15 037	18 626
3	22 069	30 153	30 416	32 163	28 061	28 061	26 586	30 411	25 989	29 574
4	39 379	51 921	52 374	55 382	48 319	48 319	43 582	49 533	43 003	49 174
5	53 212	70 159	70 772	74 837	65 292	65 292	74 051	64 462	67 691	63 318
6	70 083	92 403	93 210	98 563	85 993	85 993	84 435	83 328	82 733	81 784
7	78 263	103 188	104 090	110 068	96 030	96 030	89 886	92 419	87 562	91 736
8	93 112	122 766	123 839	130 951	114 250	114 250	104 964	109 499	103 033	108 351
9	110 561	145 773	147 047	155 492	135 660	135 660	122 822	129 420	120 713	128 649
10	166 722	219 819	221 740	234 475	204 570	204 570	187 215	194 951	183 904	191 437
Total	646 494	852 386	859 837	909 218	793 257	793 257	718 444	721 230	713 792	715 552
Company-specific estimate				16.9%	3.0%	3.0%	3.7%	3.9%	3.7%	3.9%
Total deviation parameter		11.0%	11.0%	13.5%	7.6%	7.6%	3.7%	3.9%	3.7%	3.9%

Shrnutí

- V neživotním riziku mají společnosti na výběr poměrně široké pole metod co se týče nároků na složitost výpočtů, dostupnost a kvalitu dat, kvalitu předpokladů a modelů
 - standardní vzorec
 - parametry specifické pro společnost
 - (částečný) interní model
- Metody ukázané v této prezentaci lze použít k odhadu BE rezerv a jejich rozptylu
 - zde použité metody jsou rozšířením chain-ladder
 - podobně lze použít jiné metody dávající odhad stř. hodnoty a rozptylu škod
 - incremental loss ratio (aditivní metoda)
 - rozšíření Bornhuetter-Fergusonovy metody podle Macka
- Ve spojení se simulacemi metodou bootstrap (a u některých metod částečně i analyticky) je možné odhadnout i run-off po 1 roce, jeho rozptyl a kvantil (pro účely SCR)

Shrnutí

- V neživotním riziku mají společnosti na výběr poměrně široké pole metod co se týče nároků na složitost výpočtů, dostupnost a kvalitu dat, kvalitu předpokladů a modelů
 - standardní vzorec
 - parametry specifické pro společnost
 - (částečný) interní model
- Metody ukázané v této prezentaci lze použít k odhadu BE rezerv a jejich rozptylu
 - zde použité metody jsou rozšířením chain-ladder
 - podobně lze použít jiné metody dávající odhad stř. hodnoty a rozptylu škod
 - incremental loss ratio (aditivní metoda)
 - rozšíření Bornhuetter-Fergusonovy metody podle Macka
- Ve spojení se simulacemi metodou bootstrap (a u některých metod částečně i analyticky) je možné odhadnout i run-off po 1 roce, jeho rozptyl a kvantil (pro účely SCR)

Shrnutí

- V neživotním riziku mají společnosti na výběr poměrně široké pole metod co se týče nároků na složitost výpočtů, dostupnost a kvalitu dat, kvalitu předpokladů a modelů
 - standardní vzorec
 - parametry specifické pro společnost
 - (částečný) interní model
- Metody ukázané v této prezentaci lze použít k odhadu BE rezerv a jejich rozptylu
 - zde použité metody jsou rozšířením chain-ladder
 - podobně lze použít jiné metody dávající odhad stř. hodnoty a rozptylu škod
 - incremental loss ratio (aditivní metoda)
 - rozšíření Bornhuetter-Fergusonovy metody podle Macka
- Ve spojení se simulacemi metodou bootstrap (a u některých metod částečně i analyticky) je možné odhadnout i run-off po 1 roce, jeho rozptyl a kvantil (pro účely SCR)

Závěr

- Výběr metody ve velké míře záleží na datech (jejich dostupnost a rozdělení)
- Podobně jako u tradičního rezervování by ani výpočet SCR neměl probíhat čistě mechanicky (viz příklady – je třeba posoudit, zda zvolená metoda postihne celý vývoj/tail, zda odhad vstupních parametrů je spolehlivý, apod.)
- Otestovat vhodnost/dostupnost USP/IM lze i na poměrně jednoduchém modelu např. v Excelu
- Praxe:
 - více odvětví (třeba uvažovat korelace)
 - nedostatek dat u malých odvětví
 - velké škody, neproporcionální zajištění individuálních škod
 - informace o zaplacených a nahlášených škodách

⇒ vhodné kombinovat různé metody (trojúhelník pro homogenní škody, individuální projekce pro velké škody. . .)
- Další požadavky SII: schválení, dokumentace, use test. . .

Závěr

- Výběr metody ve velké míře záleží na datech (jejich dostupnost a rozdělení)
- Podobně jako u tradičního rezervování by ani výpočet SCR neměl probíhat čistě mechanicky (viz příklady – je třeba posoudit, zda zvolená metoda postihne celý vývoj/tail, zda odhad vstupních parametrů je spolehlivý, apod.)
- Otestovat vhodnost/dostupnost USP/IM lze i na poměrně jednoduchém modelu např. v Excelu
- Praxe:
 - více odvětví (třeba uvažovat korelace)
 - nedostatek dat u malých odvětví
 - velké škody, neproporcionální zajištění individuálních škod
 - informace o zaplacených a nahlášených škodách

⇒ vhodné kombinovat různé metody (trojúhelník pro homogenní škody, individuální projekce pro velké škody. . .)
- Další požadavky SII: schválení, dokumentace, use test. . .

Závěr

- Výběr metody ve velké míře záleží na datech (jejich dostupnost a rozdělení)
- Podobně jako u tradičního rezervování by ani výpočet SCR neměl probíhat čistě mechanicky (viz příklady – je třeba posoudit, zda zvolená metoda postihne celý vývoj/tail, zda odhad vstupních parametrů je spolehlivý, apod.)
- Otestovat vhodnost/dostupnost USP/IM lze i na poměrně jednoduchém modelu např. v Excelu
- Praxe:
 - více odvětví (třeba uvažovat korelace)
 - nedostatek dat u malých odvětví
 - velké škody, neproporcionální zajištění individuálních škod
 - informace o zaplacených a nahlášených škodách

⇒ vhodné kombinovat různé metody (trojúhelník pro homogenní škody, individuální projekce pro velké škody. . .)
- Další požadavky SII: schválení, dokumentace, use test. . .

Závěr

- Výběr metody ve velké míře záleží na datech (jejich dostupnost a rozdělení)
 - Podobně jako u tradičního rezervování by ani výpočet SCR neměl probíhat čistě mechanicky (viz příklady – je třeba posoudit, zda zvolená metoda postihne celý vývoj/tail, zda odhad vstupních parametrů je spolehlivý, apod.)
 - Otestovat vhodnost/dostupnost USP/IM lze i na poměrně jednoduchém modelu např. v Excelu
 - Praxe:
 - více odvětví (třeba uvažovat korelace)
 - nedostatek dat u malých odvětví
 - velké škody, neproporcionální zajištění individuálních škod
 - informace o zaplacených a nahlášených škodách
- ⇒ vhodné kombinovat různé metody (trojúhelník pro homogenní škody, individuální projekce pro velké škody. . .)
- Další požadavky SII: schválení, dokumentace, use test. . .

Závěr

- Výběr metody ve velké míře záleží na datech (jejich dostupnost a rozdělení)
- Podobně jako u tradičního rezervování by ani výpočet SCR neměl probíhat čistě mechanicky (viz příklady – je třeba posoudit, zda zvolená metoda postihne celý vývoj/tail, zda odhad vstupních parametrů je spolehlivý, apod.)
- Otestovat vhodnost/dostupnost USP/IM lze i na poměrně jednoduchém modelu např. v Excelu
- Praxe:
 - více odvětví (třeba uvažovat korelace)
 - nedostatek dat u malých odvětví
 - velké škody, neproporcionální zajištění individuálních škod
 - informace o zaplacených a nahlášených škodách

⇒ vhodné kombinovat různé metody (trojúhelník pro homogenní škody, individuální projekce pro velké škody. . .)
- Další požadavky SII: schválení, dokumentace, use test. . .

Děkuji Vám za pozornost.

Literatura I



Adams, D.:

The Hitchhiker's Guide to the Galaxy.

Pan Books, London 1979.



McCullagh, P. and Nelder, J.A.:

Generalized Linear Models.

Chapman & Hall, 1997.



Council of the European Union:

Solvency II.

Directive 2009/138/EC of the European Parliament and of the Council on the taking-up and pursuit of the business of Insurance and Reinsurance, Brussels, 25 November 2009.

<http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2009:335:0001:0155:en:PDF>

Literatura II



European Commission:

QIS5 Technical Specifications.

Annex to Call for Advice from CEIOPS on QIS5, Brussels, 5 July 2010.

http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/qis5/201007/technical_specifications_en.pdf



European Commission:

Draft Implementing measures Solvency II.

Brussels, 31 October 2011.



England, P. D. and Verrall, R. J.:

GLMs and Their Extensions, with Applications in Actuarial Science.

Actuarial Summer School, Lausanne 2008.

Literatura III



England, P. D. and Verrall, R. J.:
Stochastic Claims Reserving in General Insurance.
British Actuarial Journal III (443-544), 2002.



Mack, T.:
The Prediction Error of Bornhuetter-Ferguson
Casualty Actuarial Society E-Forum, Fall 2008.



Mack, T.:
Schadenversicherungsmathematik.
Verlag Versicherungswirtschaft, 1997.



Mack, T.:
Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates.
Astin Bulletin, Vol. 23, No. 2, 1993.

Literatura IV



Merz, M. and Wüthrich, V.:

Modelling The Claims Development Result For Solvency Purposes.

Casualty Actuarial Society E-Forum, Fall 2008.



Merz, M. and Wüthrich, V.:

Prediction Error of the Multivariate Chain Ladder Reserving Method.

<http://www.soa.org/library/journals/north-american-actuarial-journal/2008/april/naaj-2008-vol12-no2-merz-wuthrich.pdf>



Quarg, G. and Mack, T.:

Munich Chain Ladder.

Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik, volume 26, Munich, 2004.

Literatura V



Wüthrich, V.:

*Modelling the Claims Development Result for Solvency Purposes,
Chain Ladder Model.*

Modellierung, Analyse und Simulation in der
Wirtschaftsmathematik Universität Ulm, October 24, 2008.

Detaily a důkazy

Mack's Chain-Ladder Model

Mack's Development Factors

Theorem

The estimated factors

$$\hat{f}_j = \sum_{i=1}^{n-k+1} w_{ij} C_{ij} \bigg/ \sum_{i=1}^{n-j+1} w_{ij} C_{i,j-1}$$

represent unbiased and for different j uncorrelated estimates of the development factors f_j .

Proof: for $j < k$ and for $C_{\leq k} = \{C_{im}, m \leq k, i \leq n - m + 1\}$ we can use the Mack's assumptions (1) and (2) to write

$$\begin{aligned} E \hat{f}_j \hat{f}_k &= E E (\hat{f}_j \hat{f}_k | C_{\leq j-1}) = E \sum_{i=1}^{n-k+1} w_{ij} E (C_{ij} | C_{\leq j-1}) \bigg/ \sum_{i=1}^{n-j+1} w_{ij} C_{i,j-1} \hat{f}_k \\ &= E \sum_{i=1}^{n-k+1} w_{ij} C_{i,j-1} f_j \bigg/ \sum_{i=1}^{n-j+1} w_{ij} C_{i,j-1} \hat{f}_k = E \hat{f}_j \hat{f}_k = f_j f_k = E \hat{f}_j E \hat{f}_k. \quad \square \end{aligned}$$

Mack's Variance Factors

Theorem

The variance of the estimated development factors \hat{f}_j is

$$\text{Var}(\hat{f}_j | C_{\leq j-1}) = \sigma_j^2 \sum_{i=1}^{n-j+1} w_{ij}^2 C_{i,j-1} / \left(\sum_{i=1}^{n-j+1} w_{ij} C_{i,j-1} \right)^2 .$$

Proof: follows from the Mack's assumptions (1), (2) and (3) similarly as for the development factors. □

We replace σ with $\hat{\sigma}$ to make an estimate $\widehat{\text{Var}}(\hat{f}_j)$.

Mack's Variance Factors contd.

Theorem

The estimated factors

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{d.f.} \sum_{i=1}^{n-j+1} \frac{w_{ij}}{C_{i,j-1}} (C_{ij} - \hat{f}_j C_{i,j-1})^2,$$

where d.f. is number of degrees of freedom (see the proof for exact formula), represent unbiased and for different j uncorrelated estimates of the variance factors σ_j .

Proof: The zero correlation follows from Mack's assumptions (1), (2) and (3) similarly as for the development factors.

Mack's Variance Factors contd.

For the mean value we need to calculate

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{n-j+1} \frac{w_{ij}}{C_{i,j-1}} (C_{ij} - \hat{f}_j C_{i,j-1})^2 \mid C_{\leq j-1} \right) = \\ & \mathbb{E} \sum_{i=1}^{n-j+1} w_{ij} C_{i,j-1} \mathbb{E} \left(\left((\hat{f}_j - f_j) + \left(f_j - \frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} \right) \right)^2 \mid C_{\leq j-1} \right) \end{aligned}$$

The the first two parts in

$$\left((\hat{f}_j - f_j) + \left(f_j - \frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} \right) \right)^2 = (\hat{f}_j - f_j)^2 + \left(f_j - \frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} \right)^2 - 2(\hat{f}_j - f_j) \left(\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} - f_j \right)$$

can be substituted according to:

- the formula for $\text{Var}(\hat{f}_j \mid C_{\leq j-1}) = \sigma_j^2 \sum_{i=1}^{n-j+1} w_{ij}^2 C_{i,j-1} / \left(\sum_{i=1}^{n-j+1} w_{ij} C_{i,j-1} \right)^2$ from the previous slides; and
- $\text{Var} \left(\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} \mid C_{\leq j-1} \right) = \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j-1}}$.

Mack's Variance Factors contd.

The third part to be substituted is

$$\begin{aligned}
 & E\left(\left(\hat{f}_j - f_j\right)\left(\frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} - f_j\right) \middle| C_{\leq j-1}\right) = \\
 & E\left(\frac{\sum_{k=1}^{n-j+1} w_{kj} C_{kj} - f_j C_{k,j-1}}{\sum_{k=1}^{n-j+1} w_{kj} C_{k,j-1}} \frac{C_{ij} - f_j C_{i,j-1}}{C_{i,j-1}} \middle| C_{\leq j-1}\right) = \\
 & \frac{w_{ij} \sigma_j^2}{\sum_{k=1}^{n-j+1} w_{kj} C_{k,j-1}} \cdot
 \end{aligned}$$

This equation holds because the i and k parts are independent for each combination of $k \neq i$.

Mack's Variance Factors contd.

After the substitutions and summing together we get the result

$$\sigma_j^2 \left(\sum_{i=1}^{n-j+1} w_{ij} - \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} w_{ij}^2 C_{i,j-1}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} w_{ij} C_{i,j-1}} \right) = \sigma_j^2 (d.f.).$$

Note that if we allow the weights w_{ij} to equal only 1 (include observation) or 0 (exclude observation), the $d.f.$ part reduces to $(n - j - |\{i, w_{ij} = 0\}|)$.



Smoothing and Extrapolation

The raw development factors can be extrapolated to calculate the tail factor f_∞ by the same methods as used for standard chain-ladder. In addition to that, we need to estimate the tail variance. To do this, Mack suggests the following methods:

- Estimate $\hat{\sigma}_n^2, \hat{\sigma}_\infty^2$ by fitting a regression as follows:

$$\log(\hat{\sigma}_j^2) \sim \log(\hat{f}_j - 1)$$

- Estimate $\widehat{\text{Var}}(\hat{f}_\infty)$ by $(0.5(\hat{f}_\infty - 1))^2$ corresponding to an assumption that \hat{f}_∞ lies roughly in the interval $(1, 1 + 2(\hat{f}_\infty - 1))$ with 95% probability

Reserve Variance

Because $E(X - a)^2 = \text{Var}(X) + (E X - a)^2$ we split the variance to

$$E \left((\hat{R}_i - R_i)^2 \mid \Delta \right) = E \left(- \left((C_{i\infty} - E(C_{i\infty} \mid \Delta)) + (\hat{C}_{i\infty} - E(C_{i\infty} \mid \Delta)) \right)^2 \mid \Delta \right) = \\ \text{Var}(C_{i\infty} \mid \Delta) + (\hat{C}_{i\infty} - E(C_{i\infty} \mid \Delta))^2$$

For estimation of this variance we would need an estimate of

$$(\hat{C}_{i\infty} - E(C_{i\infty} \mid \Delta))^2 = C_{i,n-i+1}^2 \left(\prod_{j=n-i+2}^{\infty} \hat{f}_j - \prod_{j=n-i+2}^{\infty} f_j \right)^2$$

We cannot create an estimate of this by simply replacing f_j by \hat{f}_j , as this would yield zero. ⁴

Instead, using $k = n - i + 1$ we can calculate the future variance as $E \left((\hat{R}_i - R_i)^2 \mid C_{\leq k} \right) = \text{Var}(C_{i\infty} \mid C_{\leq k}) + \text{Var}(\hat{C}_{i\infty} \mid C_{\leq k})$ – the first term is the same and for the second one we can find an estimate more easily.

⁴The original Mack's proof in [Mack 1993] actually uses a little trick to arrive to an estimate from this formula; the resulting estimate is however the same as here.

Reserve Variance - Process Variance

Using the Mack assumptions and the relation

$\text{Var}(X) = E \text{Var}(X|Y) + \text{Var}(E(X|Y))$ we can set $k = n - i + 1$ and for each $j > k$ calculate

$$\begin{aligned} \text{Var}(C_{i,j}|C_{\leq k}) &= E\left(\text{Var}(C_{i,j}|C_{\leq j-1}) \mid C_{\leq k}\right) + \text{Var}\left(E(C_{i,j}|C_{\leq j-1}) \mid C_{\leq k}\right) = \\ &E\left(C_{i,j-1} \mid C_{\leq k}\right) \sigma_j^2 + \text{Var}\left(C_{i,j-1} \mid C_{\leq k}\right) f_j^2 \end{aligned}$$

Knowing that

$$\text{Var}(C_{i,k}|C_{\leq k}) = 0, \quad E(C_{i,k}|C_{\leq k}) = C_{i,k}$$

we can use the above relation to recursively calculate

$$\text{Var}(C_{i\infty}|\Delta) = \text{Var}(C_{i\infty}|C_{\leq k})$$

Reserve Variance - Estimation Variance

For the estimation variance we can now calculate:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{C}_{ij} | C_{\leq k}) &= \\ \text{Var}(E(\hat{C}_{i,j-1} \hat{f}_j | C_{\leq j-1}) | C_{\leq k}) + E(\text{Var}(\hat{C}_{i,j-1} \hat{f}_j | C_{\leq j-1}) | C_{\leq k}) &= \\ \text{Var}(\hat{C}_{i,j-1} | C_{\leq k}) f_j^2 + E(\hat{C}_{i,j-1}^2 \text{Var}(\hat{f}_j | C_{\leq j-1}) | C_{\leq k}) \end{aligned}$$

which we can again estimate by a recursive formula

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{C}_{ij} | C_{\leq k}) = \widehat{\text{Var}}(\hat{C}_{ij-1} | C_{\leq k}) \hat{f}_j^2 + \hat{C}_{i,j-1}^2 \widehat{\text{Var}}(\hat{f}_j | C_{\leq j-1}).$$

Reserve Variance - Total Process Variance

Calculation of the total process variance is straightforward due to independence of rows

$$\widehat{\text{Var}}(R|\Delta) = \sum_{i=1}^n \widehat{\text{Var}}(R_i|\Delta)$$

Reserve Variance - Total Estimation Variance

Estimation variance is more difficult, but now we can just repeat the derivation performed for $\widehat{\text{Var}}(\hat{C}_{i\infty}|C_{\leq i})$. Writing

$$C_{>j} = \sum_{i=n+2-j}^n C_{ij}, \quad C_{\geq j} = \sum_{i=n+1-j}^n C_{ij}$$

we can derive (already omitting the proper conditions)

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{C}_{>j}) = \text{Var}(\hat{C}_{\geq j-1} \hat{f}_j) = \text{Var}(\hat{C}_{\geq j-1} f_j) + E((\hat{C}_{\leq j-1})^2 \text{Var}(\hat{f}_j))$$

Using $\text{Var}(\hat{C}_{\geq j-1} f_j) = \text{Var}(\hat{C}_{>j-1} f_j)$ (as $C_{n+2-j,j-1}$ is known) we get a recursive formula

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{C}_{>j}) = \widehat{\text{Var}}(\hat{C}_{>j-1}) \hat{f}_k^2 + \hat{C}_{\geq j-1}^2 \widehat{\text{Var}}(\hat{f}_j)$$

See also [Mack 1993] for further details.



One-year Run-off Variance

In ideal case would hold $\hat{C}_{i\infty} = E(C_{i\infty}|\Delta)$ and then would the calculation of one-year variance be simple, using just the Mack model variance assumptions:

$$\begin{aligned}
 & \text{Var}(E(C_{i\infty}|\Delta) - E(C_{i\infty}|\Delta^{t+1}) | \Delta) \\
 &= E\left(C_{i,n-i+1} \left(f_{n-i+2} - \frac{C_{i,n-i+2}}{C_{i,n-i+1}}\right) \prod_{j=n-i+3}^{\infty} f_j \middle| \Delta\right) \\
 &= \left(\frac{C_{i,n-i+1}}{f_{n-i+2}} \prod_{j=n-i+2}^{\infty} f_j\right)^2 E\left(f_{n-i+2} - \frac{C_{i,n-i+2}}{C_{i,n-i+1}} \middle| \Delta\right) = (E(C_{i\infty}|\Delta))^2 \psi_i
 \end{aligned}$$

One-year Run-off Variance

However, as $\hat{C}_{i\infty}$ is only an estimate of $E(C_{i\infty}|\Delta)$, additional terms covering this difference need to be added:

$$\text{Var}(Roff_i|\Delta) = (\hat{C}_{i\infty})^2 (\Psi_i + \Phi_i)$$

(See the definition of the terms in the presentation.)

Detailed derivation can be found in [Merz & Wüthrich 2008]. The derivation is more demanding than the Mack's derivation and uses several approximations, assuming that

$$1 \gg \frac{\sigma_{j+1}^2 / f_{j+1}^2}{C_{i,j}}$$

for typical claims data.

The formulas in format shown in this presentation can be found in [Wüthrich 2008].



Overdispersed Poisson model

ODP distribution

If Y_{ij} have a standard Poisson distribution $Po(\mu_{ij})$, then their (discrete) density is

$$f(y) = \frac{(\mu_{ij})^y}{y!} e^{-\mu_{ij}} = \exp\left(\frac{y \log \mu_{ij} - \mu_{ij}}{1} - \log(y!)\right).$$

The variance of this distribution is $Var(Y_{ij}) = 1 \times \mu_{ij}$. However, this strong assumptions may not be fulfilled by data in claim triangles. But we can generalise the distribution to get over-dispersed Poisson distribution with density

$$f(y) = \exp\left(\frac{y \log \mu_{ij} - \mu_{ij}}{\phi} - c(y, \phi)\right),$$

where $c(y, \phi)$ ensures that $f(y)$ integrates to 1. This is another example of exponential family distribution, with $Var(Y_{ij}) = \phi \mu_{ij}$. Thus we can apply generalized linear model (“GLM”) procedures to estimate the parameters of this distribution.

Likelihood

From the density on previous slide is the logarithm of likelihood function

$$\ell = \sum_{ij} w_{ij} \frac{Y_{ij} \theta_{ij}(\beta) - b(\theta_{ij}(\beta))}{a(\phi)} - c(Y_{ij}, \phi),$$

if we use the standard GLM notation with OPD parameters $\mu = b(\theta) = e^\theta$ and $a(\phi) = \phi$. w_{ij} are a-priori weights given to observations.

We want to find the parameters β by solving:

$$0 = \frac{d\ell}{d\beta_k} = \sum_{ij} w_{ij} \frac{d\ell}{d\theta_{ij}} \frac{d\theta_{ij}}{d\mu_{ij}} \frac{d\mu_{ij}}{d\eta_{ij}} \frac{d\eta_{ij}}{d\beta_k}.$$

For all exponential family distributions holds

$$E Y_{ij} = \mu_{ij} = b'(\theta_{ij}) \quad \text{and} \quad \text{Var}(Y_{ij}) = a(\phi) b''(\theta_{ij}) = a(\phi) V(\mu_{ij}),$$

so the above equation becomes

$$0 = \sum_{ij} w_{ij} \frac{Y_{ij} - \mu_{ij}}{\phi} \frac{1}{V(\mu_{ij})} \left(\frac{d\mu_{ij}}{d\eta_{ij}} \right)^2 \frac{d\eta_{ij}}{d\mu_{ij}} x_{ij,k}.$$

Likelihood maximisation

We can further rewrite the likelihood equation into

$$0 = \sum_{ij} \frac{1}{\phi W_z(ij)} (Y_{ij} - \mu_{ij}) \frac{d\eta_{ij}}{d\mu_{ij}} x_{ij,k},$$

where

$$W_z(ij) = \frac{1}{w_{ij}} V(\mu_{ij}) \left(\frac{d\eta_{ij}}{d\mu_{ij}} \right)^2.$$



Linear regression in z

Set $z = \eta + (Y - \mu) \frac{d\eta}{d\mu} = X\beta + \varepsilon$. Then supposing μ is fixed we have

$$w^{-1} \text{Var}(\varepsilon) = w^{-1} \text{Var}(Y) \left(\frac{d\eta}{d\mu} \right)^2 = \phi W_z,$$

so we can try to solve a linear regression of z , searching for parameters β , with variance matrix W_z .

The regression solution is $\hat{\beta} = (X^T W_z^{-1} X)^{-1} X^T W_z^{-1} z$. However, as μ itself is a function of η , we have to repeat the procedure iteratively.

If the procedure converged, then

$$(X^T W_z^{-1} X) \hat{\beta} = X^T W_z^{-1} z = (X^T W_z^{-1} X) \hat{\beta} + X^T W_z^{-1} (Y - \mu(\hat{\beta})) \left. \frac{d\eta}{d\mu} \right|_{\mu(\hat{\beta})}$$

and thus $\mu(\hat{\beta})$ solves

$$0 = \frac{1}{\phi} X^T W_z^{-1} (Y - \mu) \frac{d\eta}{d\mu},$$

which is the liability equation on previous slide in matrix form.



Error estimates

In general, we can split the variance in estimation of future claims

$\hat{Y}^F = e^{F\hat{\beta}}$ into:

$$E(Y^F - \hat{Y}^F)^2 = \text{Var}(Y^F) - 2 \text{Cov}(Y^F, \hat{Y}^F) + \text{Var}(\hat{Y}^F) + (E Y^F - E \hat{Y}^F)^2 .$$

- The first term is the variance of future observations;
- The covariance term is zero, as \hat{Y}^F is an estimate based on past observations, which are independent on future observations;
- The third term is the estimation variance;
- The last term is zero, supposing \hat{Y}^F is an unbiased estimate. We know that $F\hat{\beta}$ is unbiased, \hat{Y}^F is only approximately unbiased.

Process variance

The variance parameter ϕ can be estimated by

$$\hat{\phi} = \sum_{ij} \frac{(Y_{ij} - \mu_{ij})^2}{\mu_{ij}} / (n - p) \sim \phi \chi_{n-p}^2.$$

p is the number of parameters (length of β) and the estimate has asymptotically the above χ^2 distribution.

As we assume ODP distribution, the process variance can then be estimated by

$$\text{Var}(Y^F) = \hat{\phi} \hat{\mu}.$$

Variance of $F\hat{\beta}$

Set $A = (X^T W_z^{-1} X)^{-1} X^T W_z^{-1}$. Then $\hat{\beta} = Az$ and we know that $\text{Var}(z) = \phi W_z$. As in classical regression, the variance of $F\hat{\beta}$ is then

$$\text{Var}(F\hat{\beta}) = F A \text{Var}(z) A^T F^T = \phi F (X^T W_z^{-1} X)^{-1} F^T .$$

But we are interested in $\text{Var}(\hat{Y}^F) = \text{Var}(e^{F\hat{\beta}})$. We can use a delta method to get an approximate estimate.

Delta method approximation

We have $\hat{Y}_{ij} = \hat{\mu}_{ij} = f(\hat{\eta}_{ij})$, where in our case is $f(x) = e^x$. We can apply a Taylor expansion:

$$\mu_{ij} \doteq f(E \eta_{ij}) + f'(E \eta_{ij})(\eta_{ij} - E \eta_{ij}).$$

From this we get an approximation

$$\text{Var}(\mu_{ij}) \doteq (f')^2 \text{Var}(\eta_{ij}) = \mu_{ij}^2 \text{Var}(\eta_{ij}).$$

In matrix form, together with expression for $\text{Var}(F\hat{\beta})$ from previous slide, we get

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\mu}_{ij}) = \hat{\phi} M F (X^T W_z^{-1} X)^{-1} F^T M,$$

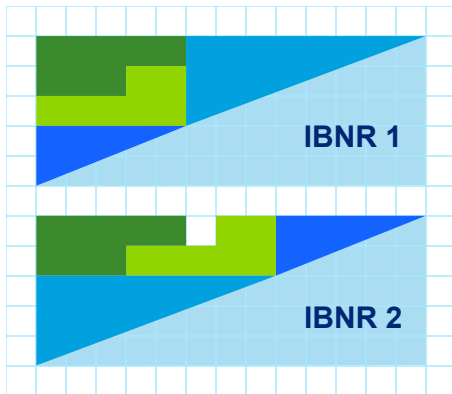
where $M = \text{diag}(\hat{\mu})$.



Snadné cvičení pro čtenáře

Snadné cvičení pro čtenáře

Zkontrolujeme, zda nyní umíme počítat trojúhelníky:



Která z uvedených „IBNR“ částí je větší?

Deloitte.

Deloitte refers to one or more of Deloitte Touche Tohmatsu Limited, a UK private company limited by guarantee, and its network of member firms, each of which is a legally separate and independent entity. Please see www.deloitte.com/about for a detailed description of the legal structure of Deloitte Touche Tohmatsu Limited and its member firms.

© 2012 Deloitte Touche Tohmatsu.