


Aplikace RJMCMC (Reversible Jumps Markov Chain Monte Carlo) metody na výpočet IBNR

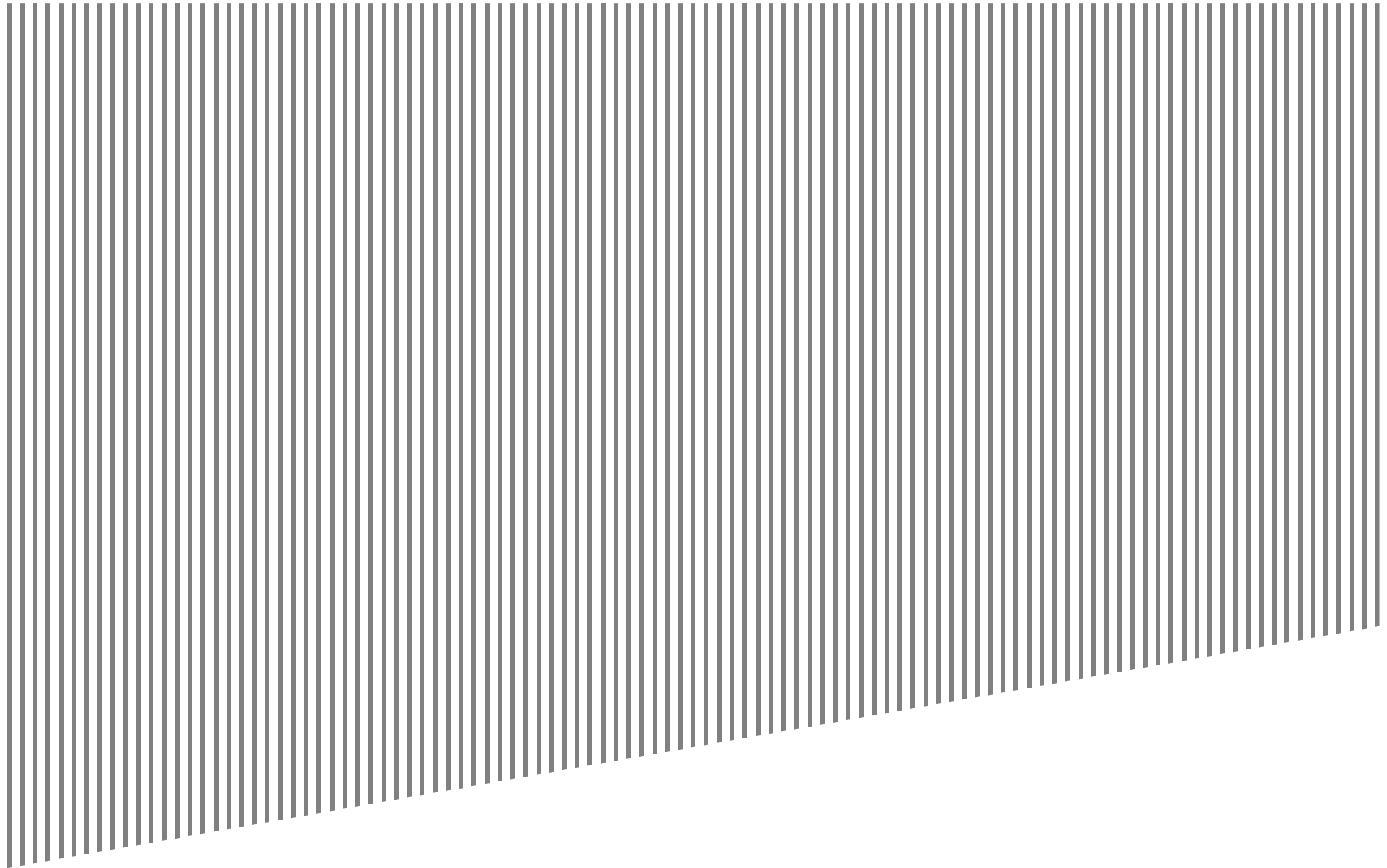


Daniel Marcinek
Seminář z aktuárských věd, MFF UK
11.listopad 2016


Obsah

- ▶ Úvod
- ▶ Základní pojmy
- ▶ Odvození RJMCMC
 - ▶ ODP
 - ▶ MCMC
 - ▶ Předpoklady
 - ▶ Algoritmus RJMCMC
- ▶ Příklad na reálných datech
- ▶ Závěr

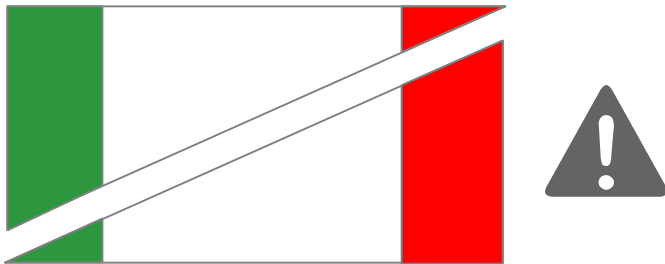
Úvod



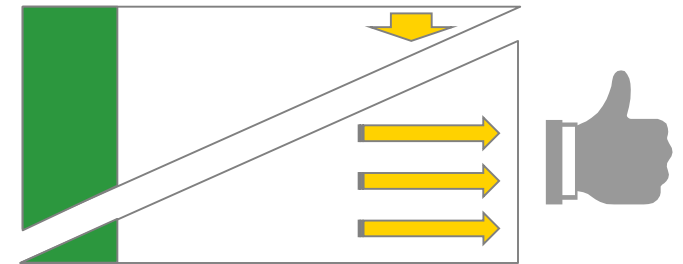
Motivace k použití RJMCMC

- ▶ Stochastická metoda (VaR 99,5%) 
- ▶ (Dis-)proporcionální využití dat

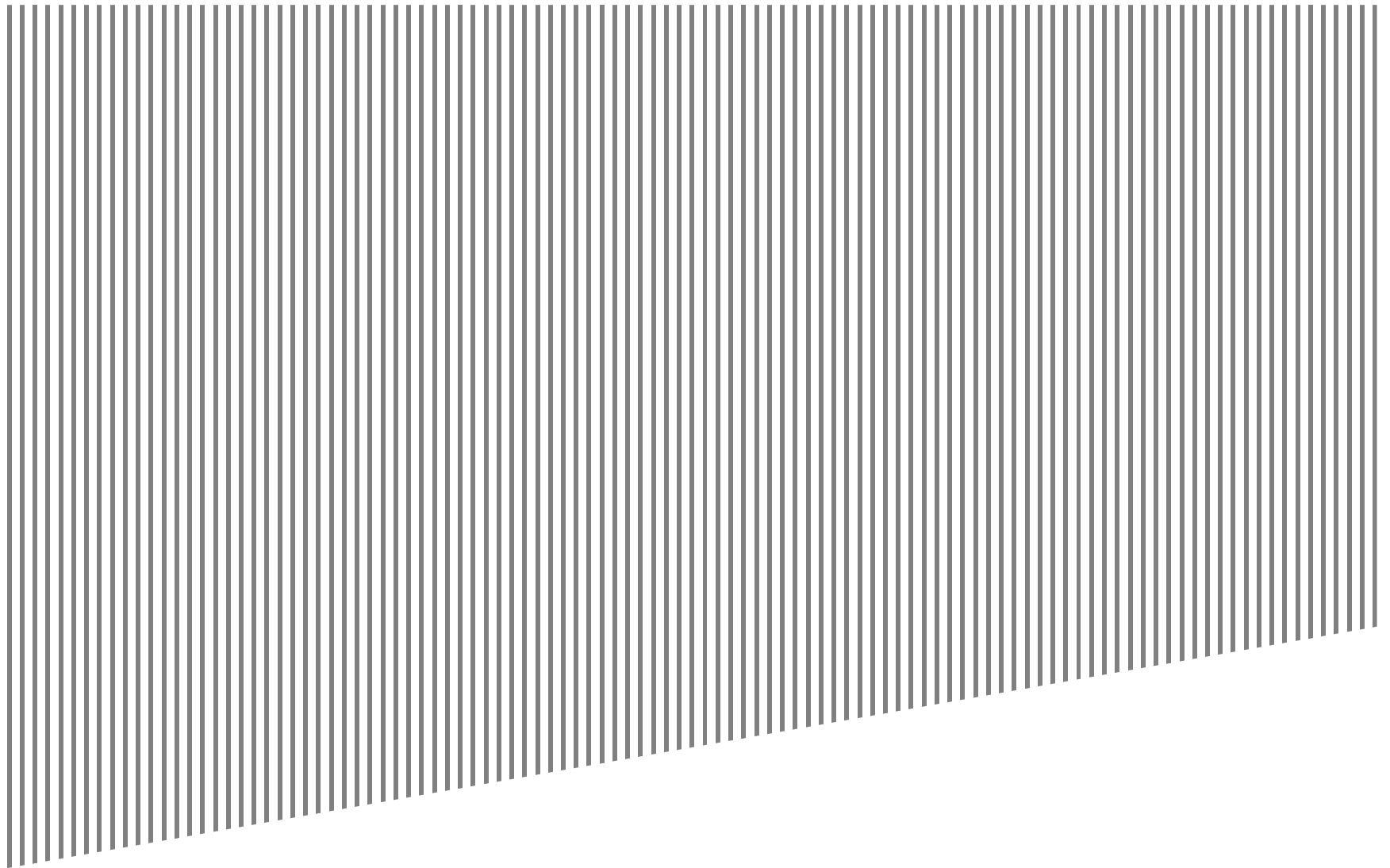
Chain-ladder



RJMCMC



Základní pojmy



Zavedení značení

Inkrementální vývojový trojúhelník

Škodní období i	Vývojové období j				
	0	1	...	$n-1$	n
0	$X_{0,0}$	$X_{0,1}$...	$X_{0,n-1}$	$X_{0,n}$
1	$X_{1,0}$	$X_{1,1}$...	$X_{1,n-1}$	
			⋮		
⋮	⋮	⋮	$X_{i,n-i}$		
$n-1$	$X_{n-1,0}$	$X_{n-1,1}$			
n	$X_{n,0}$				

$$\mathcal{D}_n = \{X_{i,j}; i + j \leq n; 0 \leq i \leq n; 0 \leq j \leq n\}$$

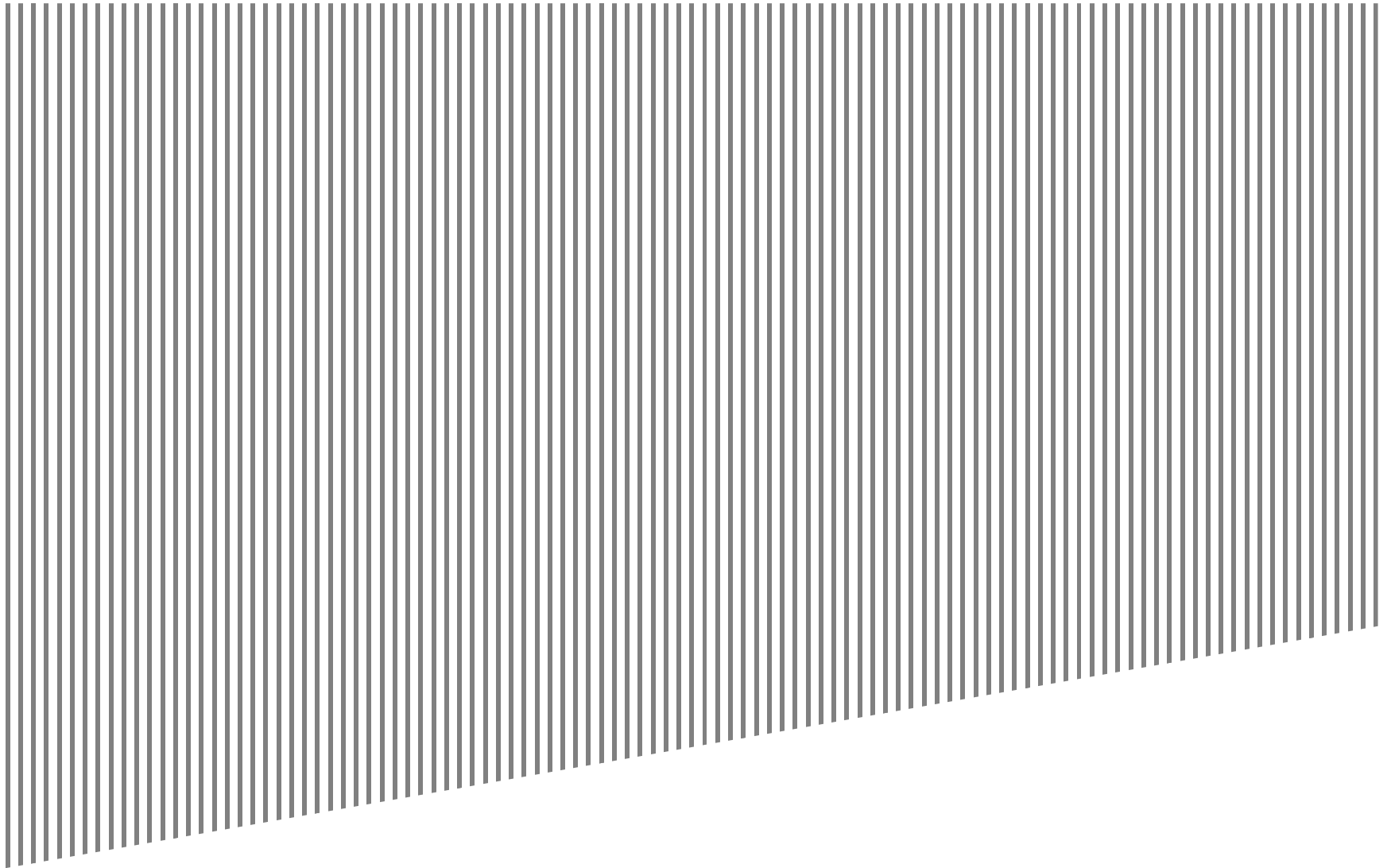
Zavedení značení

Po doplnění na čtverec – odhad rezervy

Škodní období i	Vývojové období j				
	0	1	...	$n-1$	n
0	$X_{0,0}$	$X_{0,1}$...	$X_{0,n-1}$	$X_{0,n}$
1	$X_{1,0}$	$X_{1,1}$...	$X_{1,n-1}$	$X_{1,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-1$	$X_{n-1,0}$	$X_{n-1,1}$
n	$X_{n,0}$	$X_{n,1}$	$X_{n,n}$

$$\mathcal{D}_n^C = \{X_{i,j}; i + j > n; 0 \leq i \leq n; 0 \leq j \leq n\}$$

Odvození RJMCMC



Vývoj modelu

Poissonův model → Overdispersed Poisson model

Nechť existují:

- Řádkové parametry $\mu_i > 0$, $i \in \{0, \dots, n\}$
- Sloupcové parametry $\gamma_j > 0$, $j \in \{0, \dots, n\}$

tak, že $X_{i,j}$ jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením a platí:

$$\mathbb{E}[X_{i,j}] = \text{Var}[X_{i,j}] = \mu_i \gamma_j, \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\}$$

a

$$\sum_{j=0}^n \gamma_j = 1$$

Lze rozšířit na Overdispersed Poisson model zavedením disperzního parametru $\varphi > 0$:

$$\frac{X_{i,j}}{\varphi} \sim \text{Poi} \left(\frac{\mu_i \gamma_j}{\varphi} \right), \text{ pak } \mathbb{E}[X_{i,j}] = \mu_i \gamma_j \text{ a } \text{Var}[X_{i,j}] = \varphi \mu_i \gamma_j$$

Bayesovský odhad

Částečně Bayesovský ODP model

- Zavedeme:
 - Řádkové parametry μ_i , $i \in \{0, \dots, n\}$ jsou **náhodné veličiny**
 - Sloupcové parametry $\gamma_j > 0$, $j \in \{0, \dots, n\}$ a platí $\sum_{j=0}^n \gamma_j = 1$
 - Disperzní parametr $\varphi > 0$

tak, že:

$$\frac{X_{i,j}}{\varphi} \Big|_{\mu} \sim Poi\left(\frac{\mu_i \gamma_j}{\varphi}\right)$$

Dvojice $(\mu_i, (X_{i,0}, \dots, X_{i,n}))$ $i = 0, \dots, n$ jsou nezávislé a

$$\mu_i \sim \Gamma(s, s/m_i), \quad s, m_i > 0$$

Tedy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{i,j} | \mu_i] &= \mu_i \gamma_j, & \forall i, j \in \{0, \dots, n\} \\ \text{Var}[X_{i,j} | \mu_i] &= \varphi \mu_i \gamma_j, & \forall i, j \in \{0, \dots, n\} \end{aligned}$$

Bayesovský odhad

Částečně Bayesovský ODP model

- Pomocí Bayesovských metod chceme získat odhad

$$\mathbb{E}[C_{i,n}|\mathcal{D}_n] = \operatorname{argmin}_{Y \in L_{C_{i,n}}^2(\mathcal{D}_n)} \mathbb{E}[(C_{i,n} - Y)^2 | \mathcal{D}_n], \text{ kde } C_{i,n} = \sum_{j=0}^n X_{i,j}$$

- Odhad hustoty aposteriorního rozdělení získáme pomocí Bayesovy věty:

$$u(\mu_1, \dots, \mu_n | \mathcal{D}_n) \propto \prod_{i+j \leq n} \exp \left\{ -\frac{\mu_i \gamma_j}{\varphi} \right\} \frac{\left(\frac{\mu_i \gamma_j}{\varphi} \right)^{\frac{X_{i,j}}{\varphi}}}{\left(\frac{X_{i,j}}{\varphi} \right)!} u(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

- Kde symbol \propto znamená „rovnost až na normalizační konstantu“
- Pro apriorní rozdělení $\mu_i \sim \Gamma(s, s/m_i)$ je aposteriorní rozdělení také Gamma a lze vyjádřit analyticky

Bayesovský odhad

Plně Bayesovský ODP model

- Zavedeme:
 - Vektor $\boldsymbol{\theta} = (\mu_0, \dots, \mu_n, \gamma_0, \dots, \gamma_n)$ s vzájemně nezávislými náhodnými veličinami
 - Disperzní parametr $\varphi > 0$

tak, že:

$$\frac{X_{i,j}}{\varphi} \Big|_{\boldsymbol{\theta}} \sim \text{Poi} \left(\frac{\mu_i \gamma_j}{\varphi} \right) \text{ a jsou vzájemně nezávislé}$$

$$\mathbb{E}[X_{i,j} | \boldsymbol{\theta}] = \mu_i \gamma_j, \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\}$$

$$\text{Var}[X_{i,j} | \boldsymbol{\theta}] = \varphi \mu_i \gamma_j, \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\}$$

$$\mu_i \sim \Gamma(s, s/m_i)$$

$$\gamma_j \sim \Gamma(v, v/c_j)$$

$$s, v, m_i, c_j > 0$$

Bayesovský odhad

Plně Bayesovský ODP model

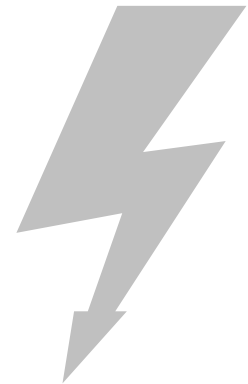
- Odhad opět získáme pomocí Bayesovy věty:

$$u(\mu_1, \dots, \mu_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n | \mathcal{D}_n) \propto \prod_{i+j \leq n} \exp \left\{ -\frac{\mu_i \gamma_j}{\varphi} \right\} \frac{\left(\frac{\mu_i \gamma_j}{\varphi} \right)^{\frac{X_{i,j}}{\varphi}}}{\left(\frac{X_{i,j}}{\varphi} \right)!} u(\mu_1, \dots, \mu_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

- Pro apriorní rozdělení $\mu_i \sim \Gamma(s, s/m_i)$ a $\gamma_j \sim \Gamma(v, v/c_j)$

NELZE

aposteriorní rozdělení vyjádřit analyticky!



Metoda Markov Chain Monte Carlo

Metropolis-Hastingsův algoritmus

$$u(\Theta|X) = \frac{f(X|\Theta)u_{\Theta}(\Theta)}{\int_{\Theta} f(X|\Theta)u_{\Theta}(\Theta) d\Theta}$$

- Místo analytického vyjádření aposterioriho rozdělení sestavíme reversibilní ergodický Markovský řetězec:
 $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$, který má $u(\Theta|X)$ jako *stacionární rozdělení*
- Ergodický MŘ je nerozložitelný řetězec, který má všechny stavy trvalé nenulové a neperiodické
- Reversibilní MŘ $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$:
$$\pi_i P(\Theta_{t+1} = j | \Theta_t = i) = \pi_j P(\Theta_{t+1} = i | \Theta_t = j),$$
kde π je stacionární rozdělení MŘ $(\Theta_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$
- Dále budeme potřebovat pravděpodobnost přijetí α a návrhovou hustotu $q(\cdot | \cdot)$

Metoda Markov Chain Monte Carlo

Metropolis-Hastingsův algoritmus

1. Inicializuj Θ_0 a $t = 0$
2. Pro $t \leq t_{max}$
 - a) Generuj Θ^* z $q(\cdot | \Theta_t)$
 - b) Spočti
 - ▶ $\alpha(\Theta_t, \Theta^*) = \min \left\{ 1, \frac{u(\Theta^* | X) q(\Theta_t | \Theta^*)}{u(\Theta_t | X) q(\Theta^* | \Theta_t)} \right\}$
 - c) Generuj $U \sim \mathcal{U}(0,1)$
 - d) Pokud $U \leq \alpha(\Theta_t, \Theta^*)$ tak nastav $\Theta_{t+1} = \Theta^*$, jinak $\Theta_{t+1} = \Theta_t$
 - e) $t = t + 1$ a jdi na krok 2.

Bayesovský odhad

ODP model s exponenciálním rozkladem

- Zavedeme:

- Vektor $\theta_k = (\alpha, \beta, \mu_0, \dots, \mu_n, \gamma_0, \dots, \gamma_{k-1})$ s vzájemně nezávislými n.v.
- Disperzní parametr $\varphi > 0$
- Index useknutí k , který určuje, od kterého vývojového období předpokládáme exponenciální rozklad $\gamma_j = \exp(\alpha - j\beta) \quad \forall j \in \{k, \dots, n\}$

Máme:

$$\begin{aligned} \frac{X_{i,j}}{\varphi} \Big|_{\theta_k} &\sim Poi\left(\frac{\mu_i \gamma_j}{\varphi}\right) \text{ vzájemně nezávislé} \\ \mathbb{E}[X_{i,j} | \theta_k] &= \mu_i \gamma_j, \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\} \\ \text{Var}[X_{i,j} | \theta_k] &= \varphi \mu_i \gamma_j, \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n\} \\ \mu_i &\sim \Gamma(s, s/m_i), \quad i = 0, \dots, n \\ \gamma_j &\sim \Gamma(v, v/c_j), \quad j = 0, \dots, k-1 \\ \gamma_j &= \exp(\alpha - j\beta), \quad j = k, \dots, n \\ \alpha &\sim \mathcal{N}(a, \sigma^2), \quad \beta \sim \mathcal{N}(b, \tau^2) \\ m_i, s, c_j, v, \sigma, \tau &> 0; a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Model pro potřeby RJMCMC

- Model budeme značit \mathcal{M}_k , $k \in \{1, \dots, n\}$
- Nyní nestačí Bayesovský odhad θ_k , ale nutno i \mathcal{M}_k , tedy:
$$u(\mathcal{M}_k, \theta_k | X) \propto f_k(X | \theta_k) u_{\theta_k}(\theta_k) u(\mathcal{M}_k)$$
- Budeme hledat MŘ $(\Theta^{(t)})_{t \in \mathbb{N}_0} = (k^{(t)}, \theta_k^{(t)})_{t \in \mathbb{N}_0}$, jehož stacionární rozdělení má hustotu $u(\mathcal{M}_k, \theta_k | X)$
- Je třeba doplnit apriorní rozdělení $u(\mathcal{M}_k) = \frac{1}{n}$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$

Model pro potřeby RJMCMC

Dále potřebujeme:

- Návrhovou hustotu dodatečného parametru:
 - ▶ $g_{k \rightarrow k^*}(\cdot | \cdot)$
- Funkci:
 - ▶ $T_{k \rightarrow k^*}(\cdot | \cdot)$
 - Pro kterou platí, že je difeomorfismus, tzn.
 - Spojitě diferencovatelná a
 - Existuje k ní inverzní zobrazení, které je také spojitě diferencovatelné
 - $T_{k \rightarrow k^*}^{-1} = T_{k^* \rightarrow k}$

Algoritmus RJMCMC

1. Inicializuj $\Theta^{(0)}$ a $t = 0$
2. Pro $t \leq t_{max}$ vyber \mathcal{M}_{k^*} s návrhovou hustotou $k^* \sim q(\cdot | k^{(t)})$
 - a) Pokud $k^* = k^{(t)}$ tak aktualizuj parametry pomocí MH na $\Theta^{(t+1)} = (k^*, \theta_{k^*}^{(t+1)})$ a jdi na krok c)
 - b) Pokud $k^* \neq k^{(t)}$ tak
 - i. Generuj $u^{(t)}$ z rozdělení $g_{k^{(t)} \rightarrow k^*}(\cdot | \theta_{k^{(t)}}^{(t)})$ a nastav $(\theta_{k^*}^*, u^*) = T_{k^{(t)} \rightarrow k^*}(\theta_{k^{(t)}}^{(t)}, u^{(t)})$
 - ii. Spočti pravděpodobnost přijetí $\alpha(t \rightarrow *)$
 - iii. S pravděpodobností přijetí akceptuj $\Theta^{(t+1)} = (k^*, \theta_{k^*}^*)$ jinak ponechej $\Theta^{(t+1)} = (k^{(t)}, \theta_{k^{(t)}}^{(t)})$
 - c) $t = t + 1$ a jdi na krok 2.

Detail kroku 2)

- Návrhová hustota $k \sim q(\cdot | k^{(t)})$, pro kterou platí:
 - $q(k - 1 | k) = q(k | k) = q(k + 1 | k) = 1/3$
 - $q(1 | 1) = 2/3$ a $q(2 | 1) = 1/3$
 - $q(n | n) = 2/3$ a $q(n - 1 | n) = 1/3$
- Zaručuje zjednodušení druhého členu v pravděpodobnosti přijetí:

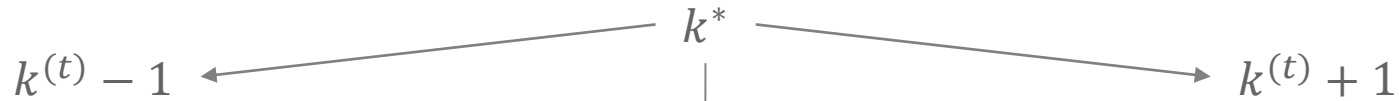
$$\frac{u(\mathcal{M}_{k^*}, \boldsymbol{\theta}_{k^*}^* | X) q(k^{(t)} | k^*) g_{k^* \rightarrow k^{(t)}}(u^* | \boldsymbol{\theta}_{k^*}^*)}{u(\mathcal{M}_{k^{(t)}}, \boldsymbol{\theta}_{k^{(t)}}^{(t)} | X) \underbrace{q(k^* | k^{(t)})}_{1} g_{k^{(t)} \rightarrow k^*}(u^{(t)} | \boldsymbol{\theta}_{k^{(t)}}^{(t)})} \left| \frac{\partial T_{k^{(t)} \rightarrow k^*}(\boldsymbol{\theta}_{k^{(t)}}^{(t)}, u^t)}{\partial(\boldsymbol{\theta}_{k^{(t)}}^{(t)}, u^t)} \right|$$

Detail kroku 2a)

1. Aktualizujeme $(\mu_0^{(t)}, \dots, \mu_n^{(t)})$ za použití Gibbsova výběrového plánu $\mu_0^{(t+1)}, \dots, \mu_n^{(t+1)} \sim u(\cdot | \alpha^{(t)}, \beta^{(t)}, \gamma_0^{(t)}, \dots, \gamma_{k^{(t)}-1}^{(t)}, \mathcal{D}_n)$
 2. Aktualizujeme $(\gamma_0^{(t)}, \dots, \gamma_{k^{(t)}-1}^{(t)})$ za použití Gibbsova výběrového plánu $\gamma_0^{(t+1)}, \dots, \gamma_{k^{(t)}-1}^{(t+1)} \sim u(\cdot | \alpha^{(t)}, \beta^{(t)}, \mu_0^{(t+1)}, \dots, \mu_n^{(t+1)}, \mathcal{D}_n)$
 3. Aktualizujeme $(\alpha^{(t)}, \beta^{(t)})$ za použití MH algoritmu
- Provedením těchto kroků obdržíme

$$\begin{aligned} \Theta^{(t+1)} &= (k^{(t+1)}, \theta_{k^{(t+1)}}^{(t+1)}) = \\ &= (k^{(t+1)}, (\alpha^{(t+1)}, \beta^{(t+1)}, \mu_0^{(t+1)}, \dots, \mu_n^{(t+1)}, \gamma_0^{(t+1)}, \dots, \gamma_{k^{(t)}-1}^{(t+1)})) \end{aligned}$$

Detail kroku 2b)



$$k^* = k^{(t)} - 1$$

$$(\theta_{k^*}^*, u^*) = T_{k^{(t)} \rightarrow k^{(t)} - 1}(\theta_{k^{(t)}}^{(t)})$$

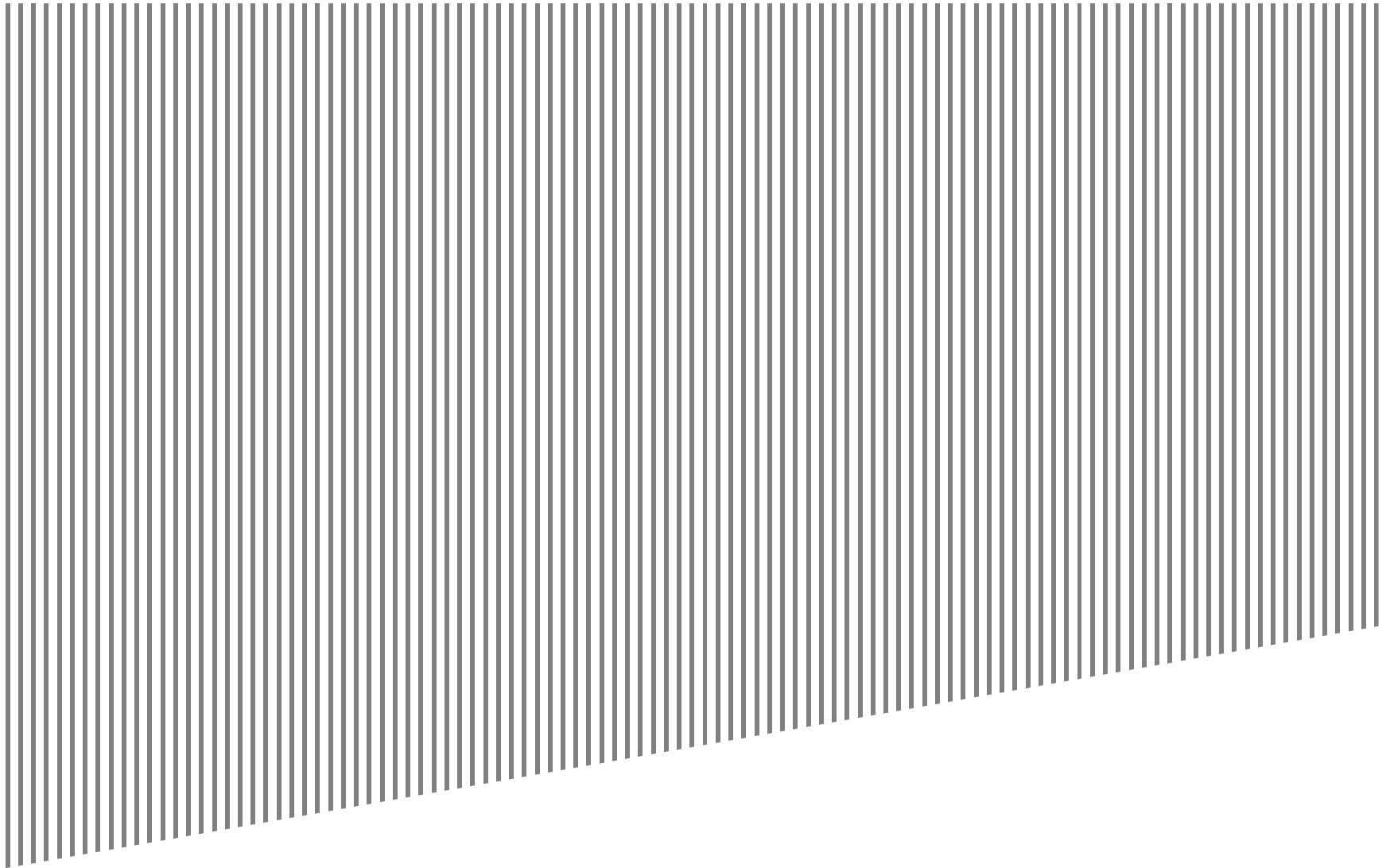
$$u^* = \gamma_{k^{(t)} - 1}^{(t)}$$

$$\theta_{k^*}^* = T_{k^{(t)} \rightarrow k^{(t)} + 1}(\theta_{k^{(t)}}^{(t)}, u^{(t)})$$

$$u^{(t)} \sim g_{k^{(t)} \rightarrow k^{(t)} + 1}(\cdot | \theta_{k^{(t)}}^{(t)}) \stackrel{(d)}{=} \stackrel{(d)}{=} \Gamma(v^*, v^* / \exp\{\alpha^{(t)} - k^{(t)}\beta^{(t)}\})$$

$$v^* > 0$$

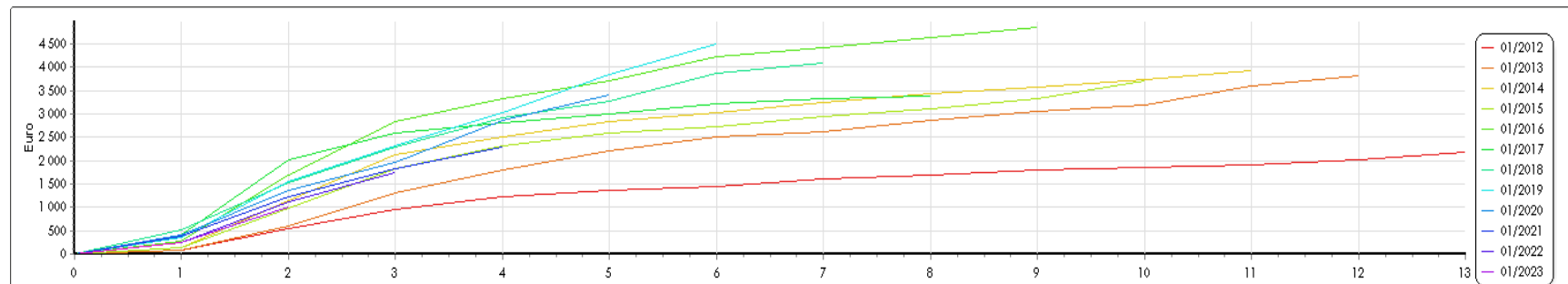
Příklad na reálných datech



Vstupní data (POV – škody na zdraví)

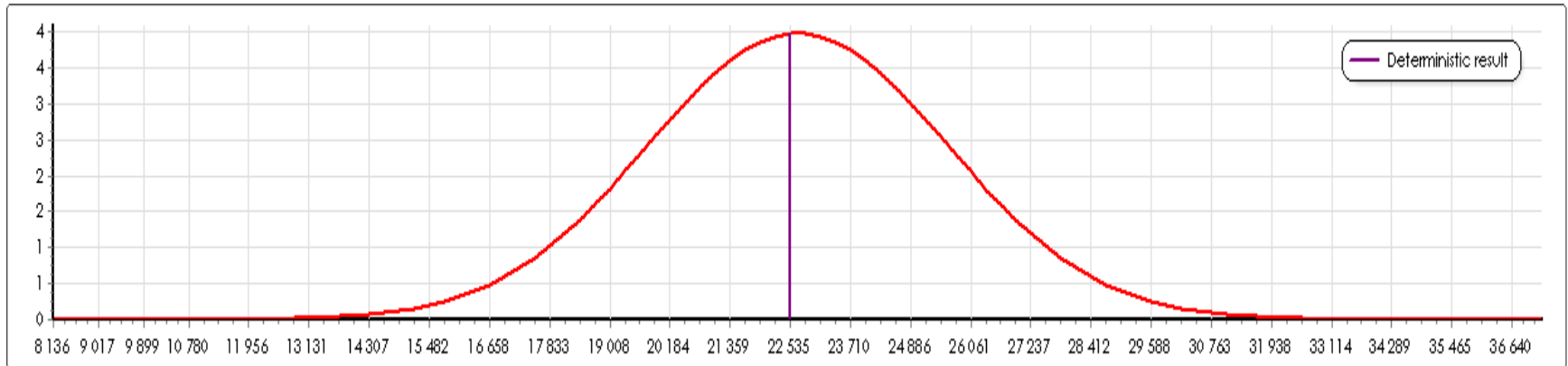
► Inkrementální trojúhelník vyplacených škod 13x13

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	93	441	431	249	141	104	143	89	111	65	54	107	148
1	80	516	699	504	417	301	101	240	199	136	415	210	
2	135	1010	988	382	319	182	226	200	117	185	170		
3	128	863	838	474	287	145	205	173	216	365			
4	278	1399	1153	505	377	506	204	209	220				
5	398	1620	559	229	204	197	129	54					
6	508	1016	778	622	337	600	236						
7	364	1199	752	718	816	642							
8	397	958	608	895	559								
9	371	856	597	474									
10	243	863	642										
11	243	777											
12	241												

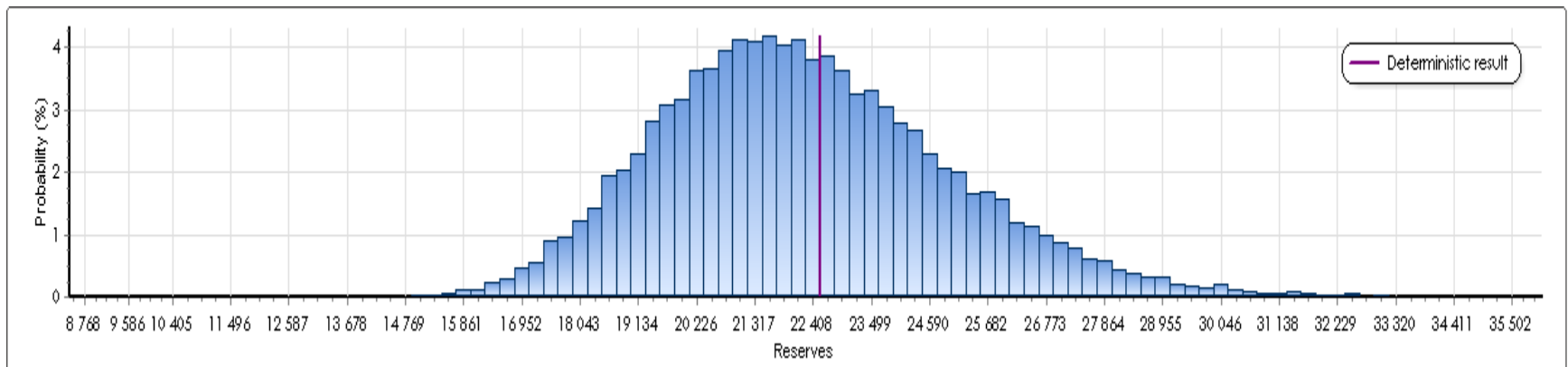


Mack Chain-Ladder vs. RJMCMC (POV – škody na zdraví)

Hustota rezervy - Mack

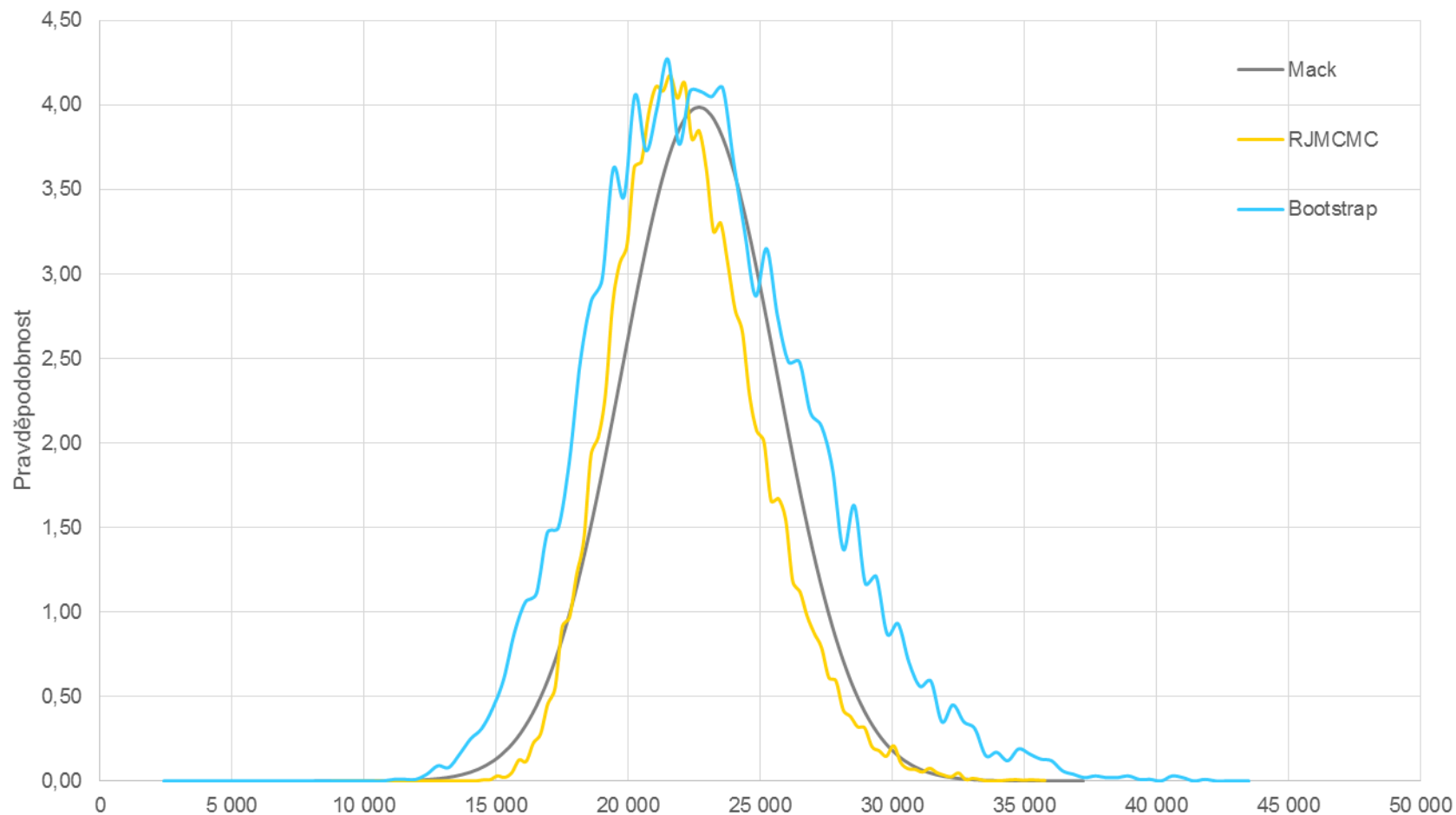


Hustota rezervy - RJMCMC



Mack Chain-Ladder vs. RJMCMC (POV – škody na zdraví)

Porovnání hustoty rezerv

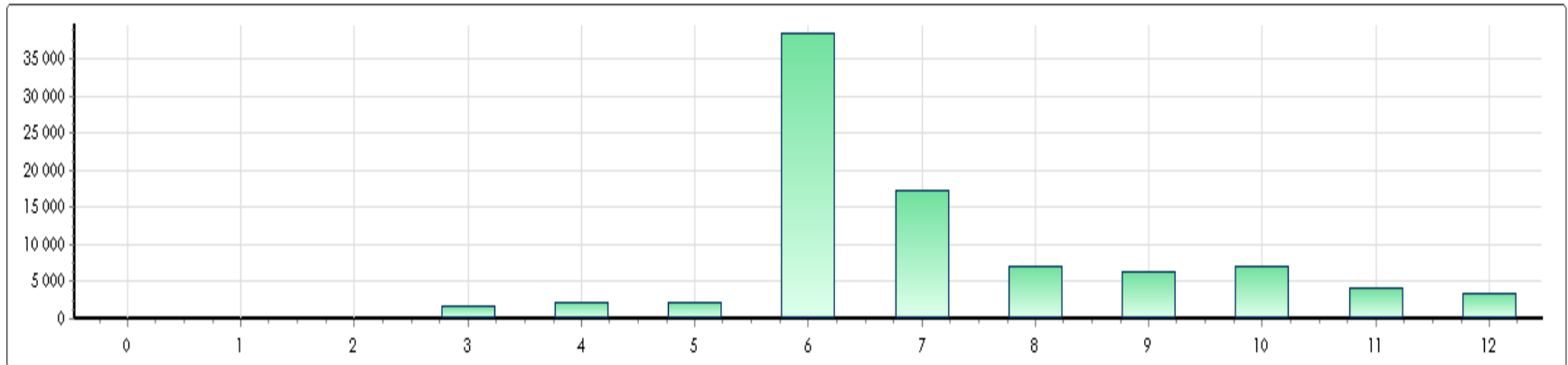


RJMCMC – porovnání (POV – škody na zdraví)

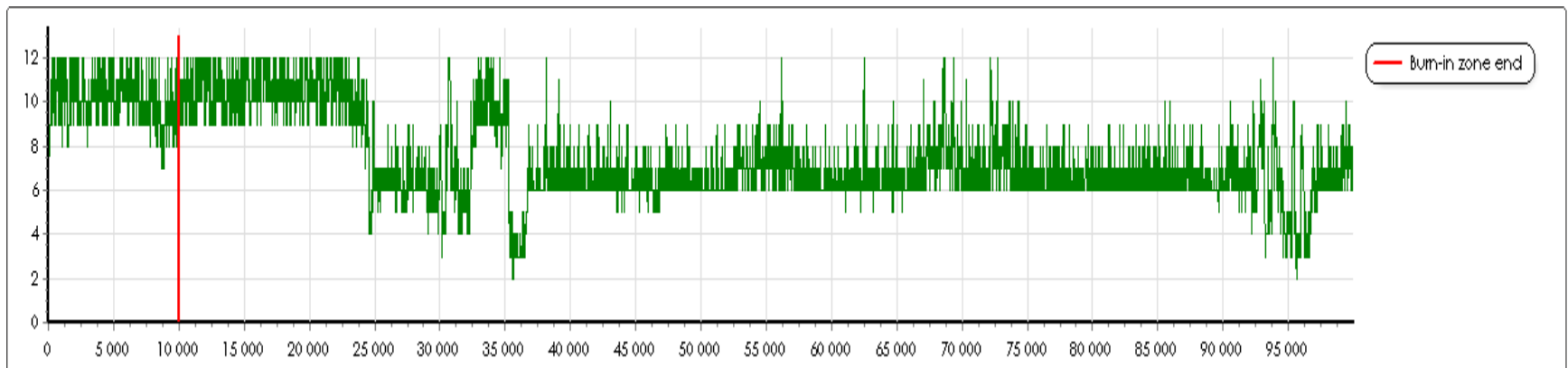
Rok	RJMCMC		Mack CL		Bootstrap	
	Střední hodnota	Směrodatná odchylka	Střední hodnota	Směrodatná odchylka	Střední hodnota	Směrodatná odchylka
0	0	0	0	0	0	0
1	246	94	278	0	288	223
2	516	165	526	7	534	285
3	761	205	801	238	808	330
4	1 362	315	1 428	350	1 441	477
5	1 200	246	1 239	296	1 247	404
6	1 758	314	1 794	370	1 810	504
7	2 313	368	2 349	422	2 368	597
8	2 363	340	2 397	463	2 414	600
9	2 177	292	2 206	489	2 217	560
10	2 516	317	2 541	630	2 566	658
11	2 923	348	2 948	894	2 971	838
12	4 000	475	4 029	1 859	4 084	2 069
Celkem	22 135	2 728	22 535	2 939	22 747	4 150

RJMCMC – detailní výsledky (POV – škody na zdraví)

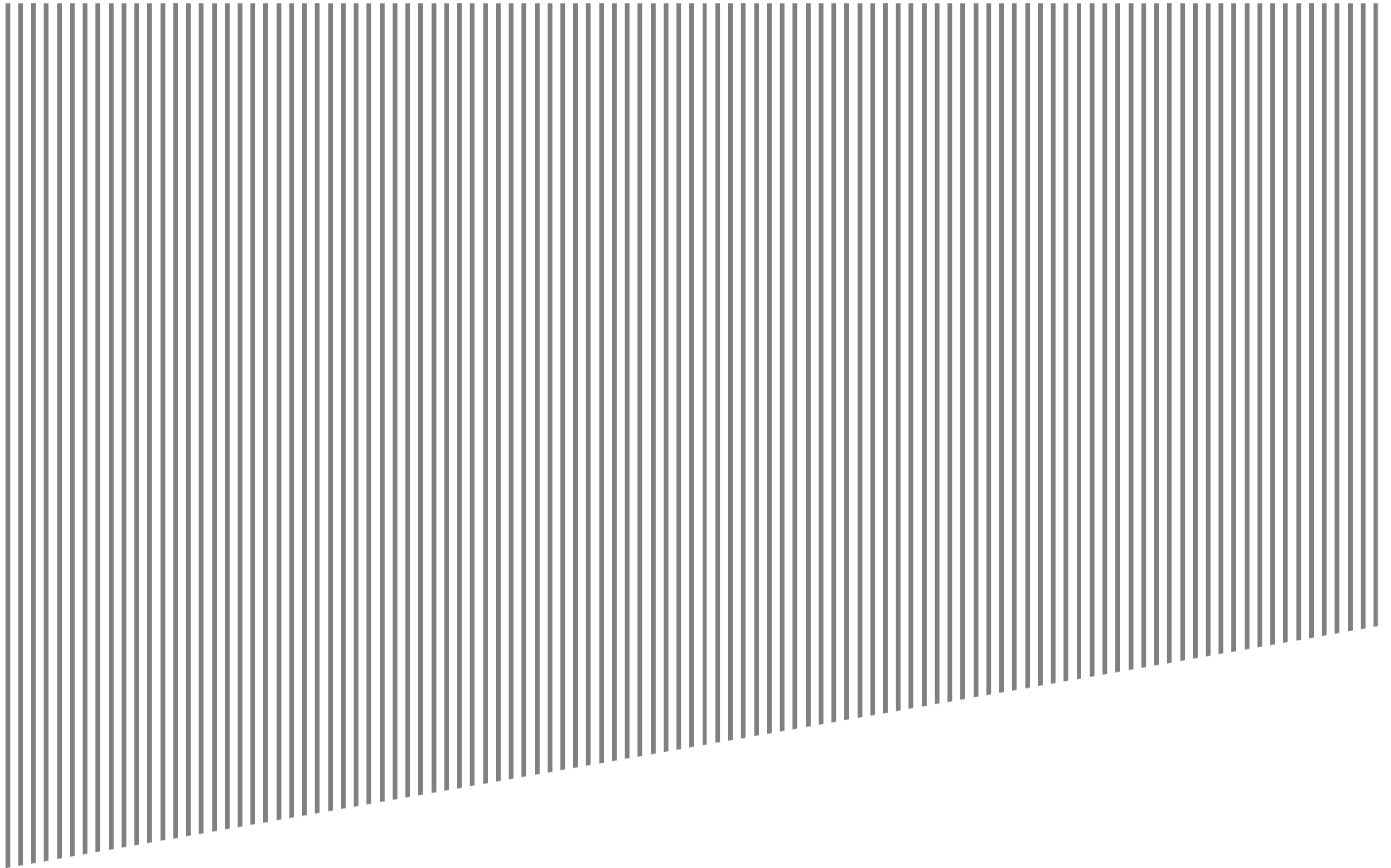
Index useknutí



Realizace indexu useknutí



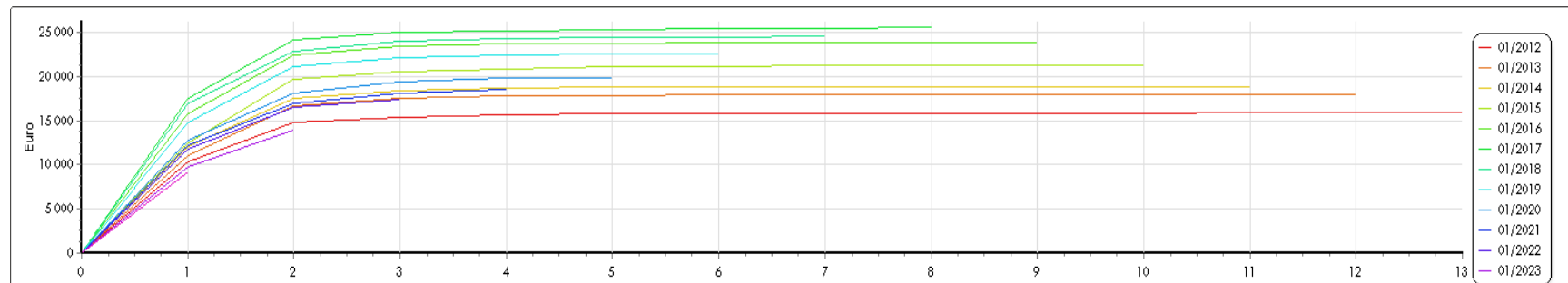
Praktický příklad – POV věcné škody



Vstupní data (POV - věcné škody)

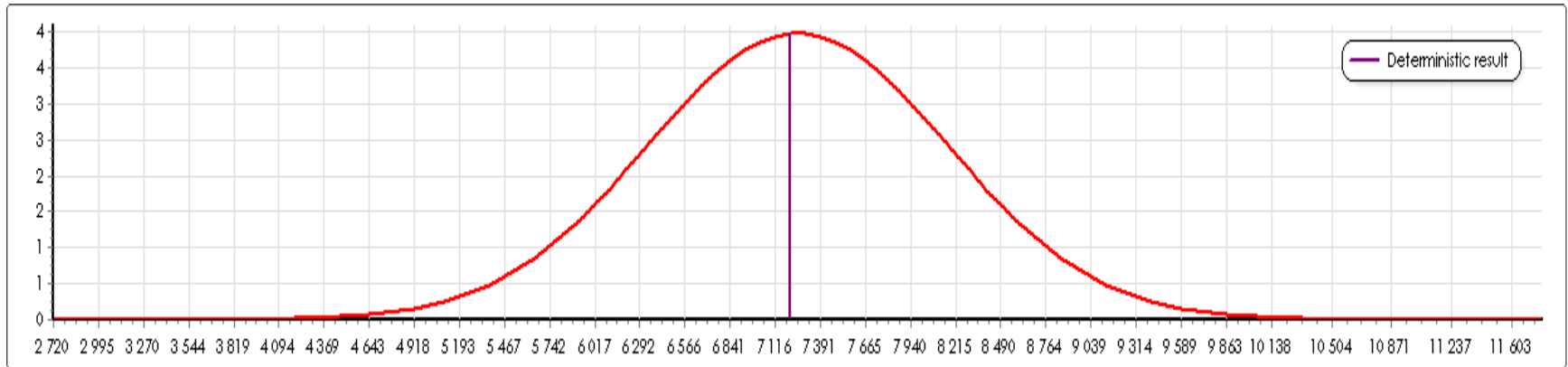
► Inkrementální trojúhelník vyplacených škod 13x13

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	10 322	4 523	595	224	154	17	10	9	4	-9	79	-2	-5
1	11 015	5 724	829	233	89	51	15	4	-11	5	-4	-12	
2	12 127	5 493	808	239	110	22	16	17	4	-3	-4		
3	12 578	7 170	862	314	157	86	116	-46	62	51			
4	15 766	6 670	987	277	94	62	44	29	12				
5	17 517	6 657	799	269	103	58	116	87					
6	16 944	5 998	1 018	303	198	52	73						
7	14 781	6 358	988	277	125	40							
8	12 840	5 356	1 265	333	117								
9	12 255	4 783	1 112	412									
10	11 743	4 865	844										
11	9 792	4 210											
12	9 192												

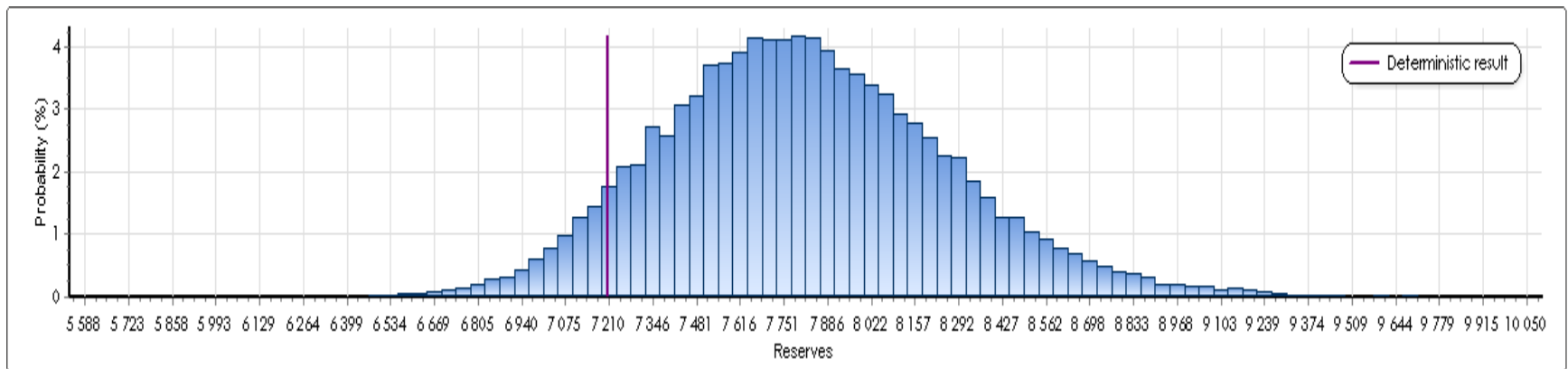


Mack Chain-Ladder vs. RJMCMC (POV - věcné škody)

Hustota rezervy - Mack

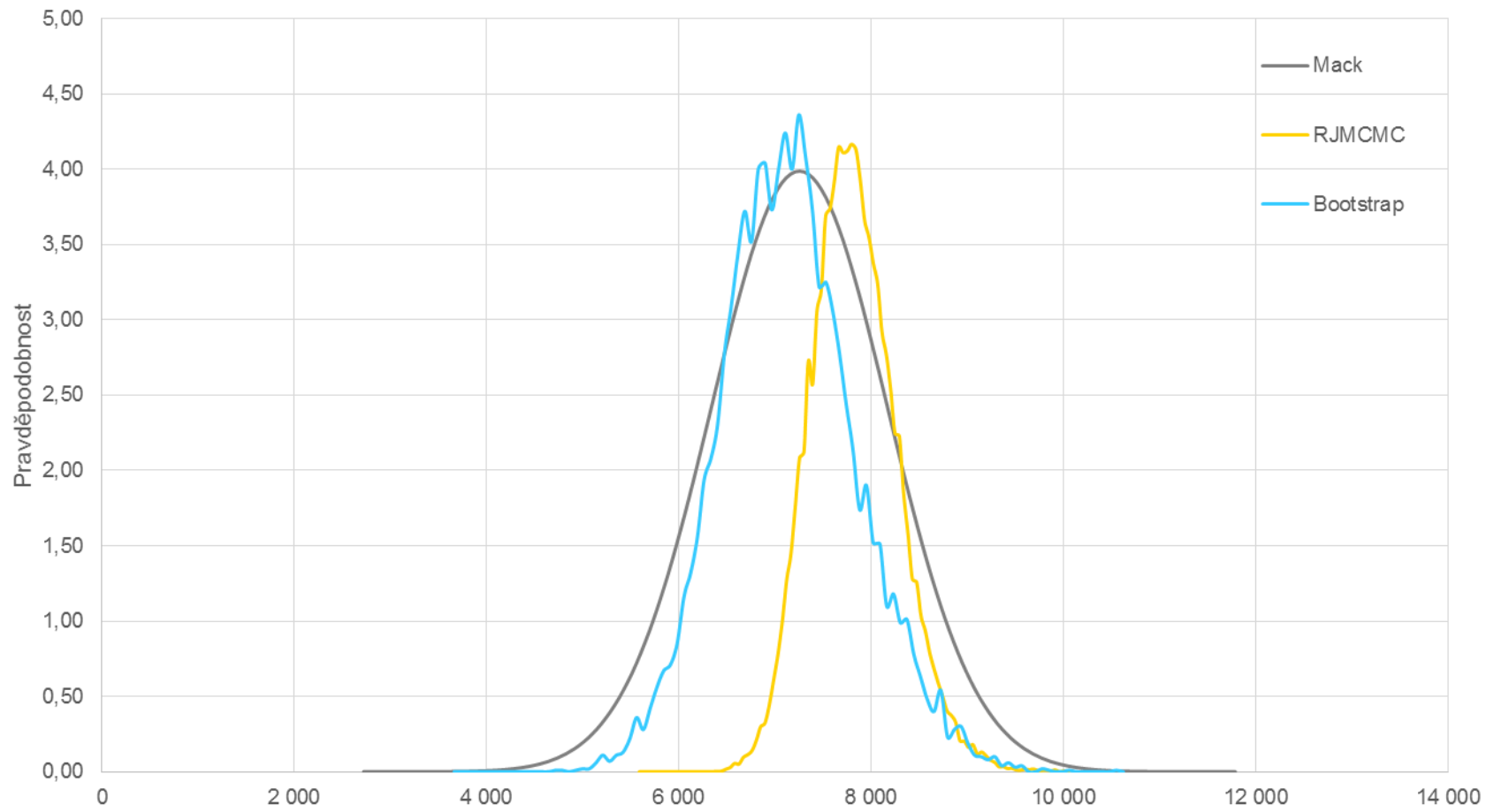


Hustota rezervy - RJMCMC



Mack Chain-Ladder vs. RJMCMC (POV - věcné škody)

Porovnání hustoty rezerv

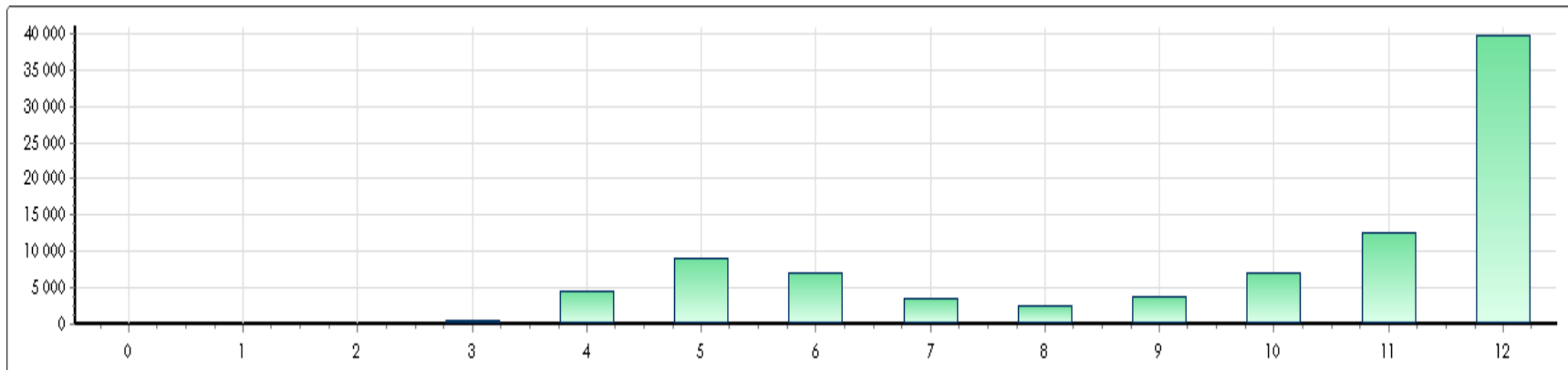


RJMCMC – porovnání (POV - věcné škody)

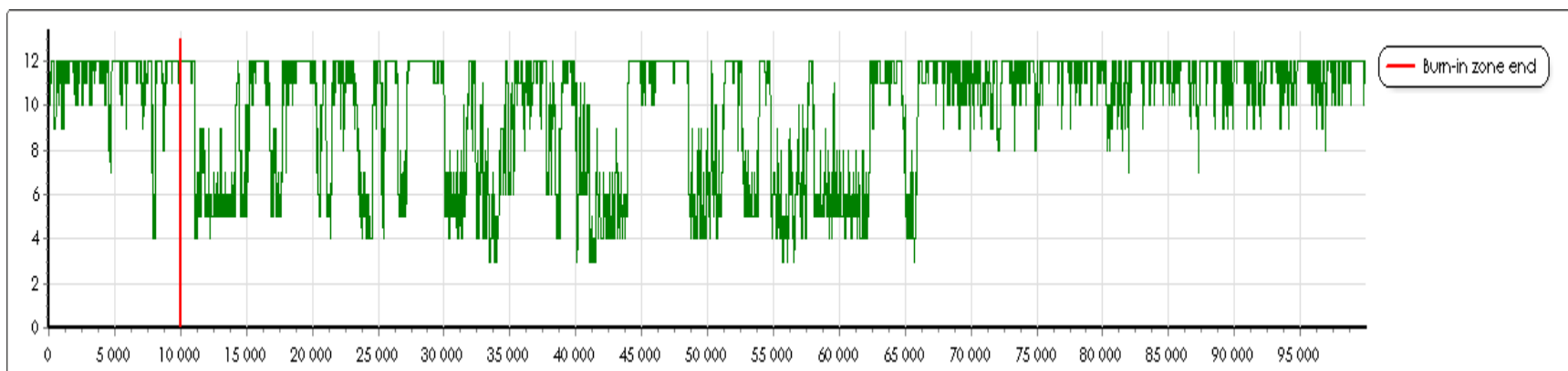
Rok	RJMCMC		Mack CL		Bootstrap	
	Střední hodnota	Směrodatná odchylka	Střední hodnota	Směrodatná odchylka	Střední hodnota	Směrodatná odchylka
0	0	0	0	0	0	0
1	7	10	-6	1	-11	22
2	17	15	-14	9	-22	31
3	47	26	13	68	4	57
4	75	33	29	80	18	71
5	107	38	49	90	39	83
6	142	40	67	100	57	94
7	189	41	121	105	111	102
8	215	38	153	99	146	103
9	314	42	256	103	248	120
10	545	51	490	121	482	150
11	1 127	74	1 081	213	1 076	209
12	5 011	283	4 968	752	4 959	520
Celkem	7 796	451	7 208	916	7 106	703

RJMCMC – detailní výsledky (POV - věcné škody)

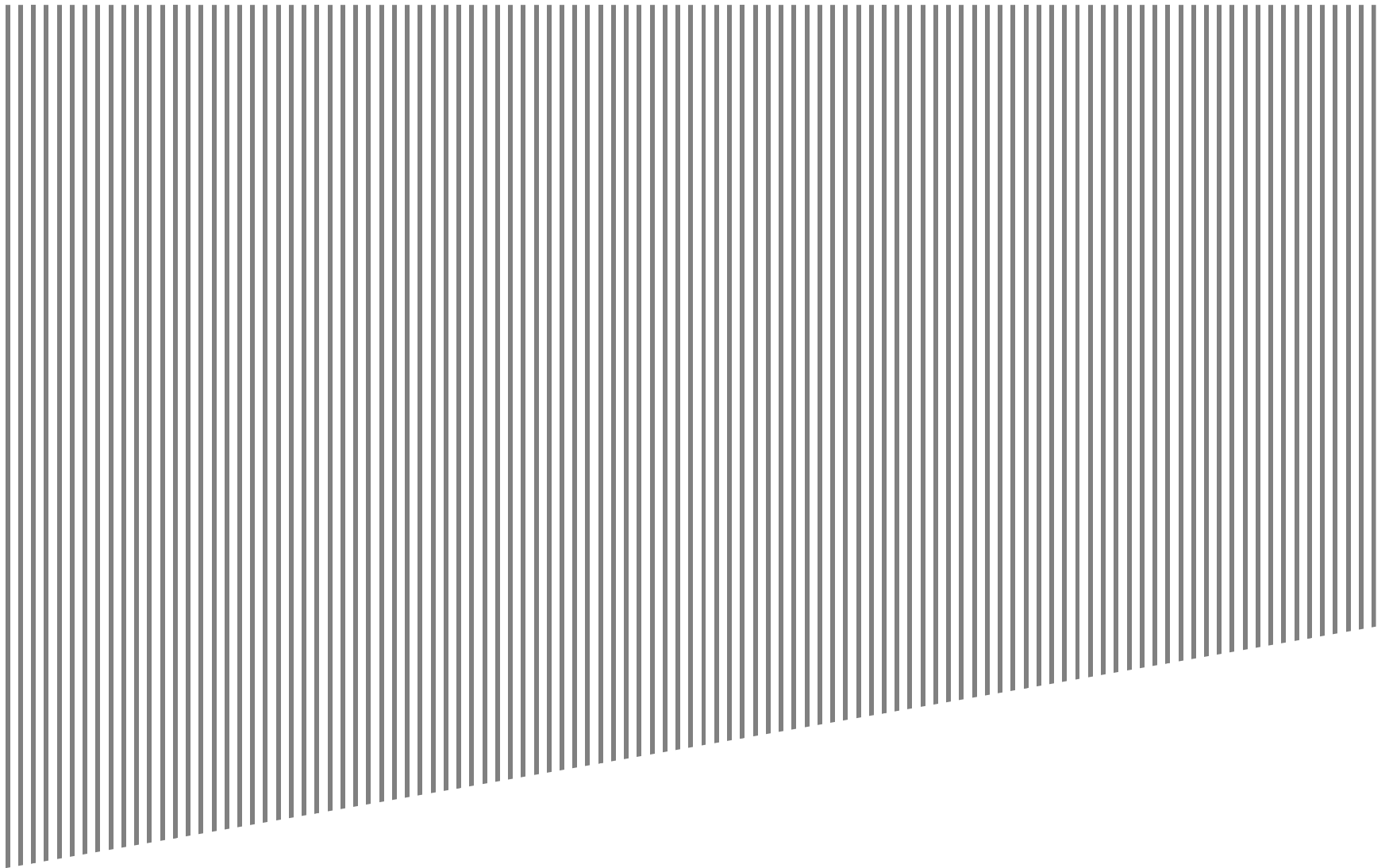
Index useknutí



Realizace indexu useknutí



Praktický příklad – pojištění plodin

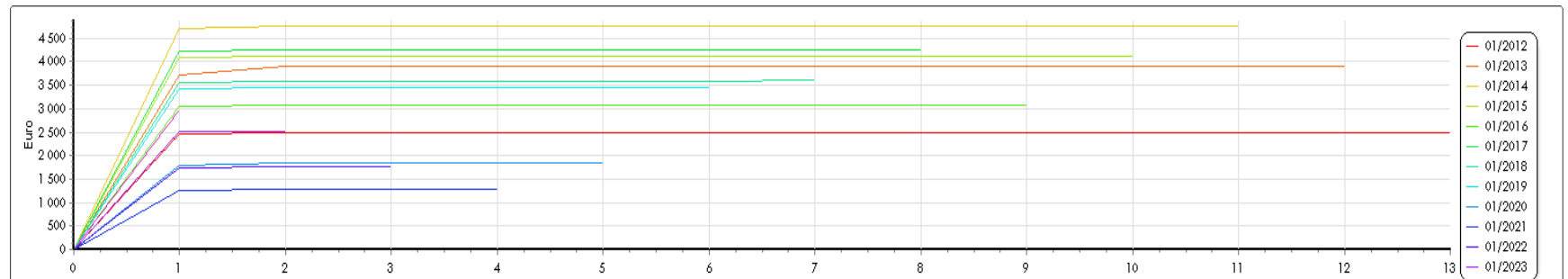


Vstupní data

(Pojištění plodin)

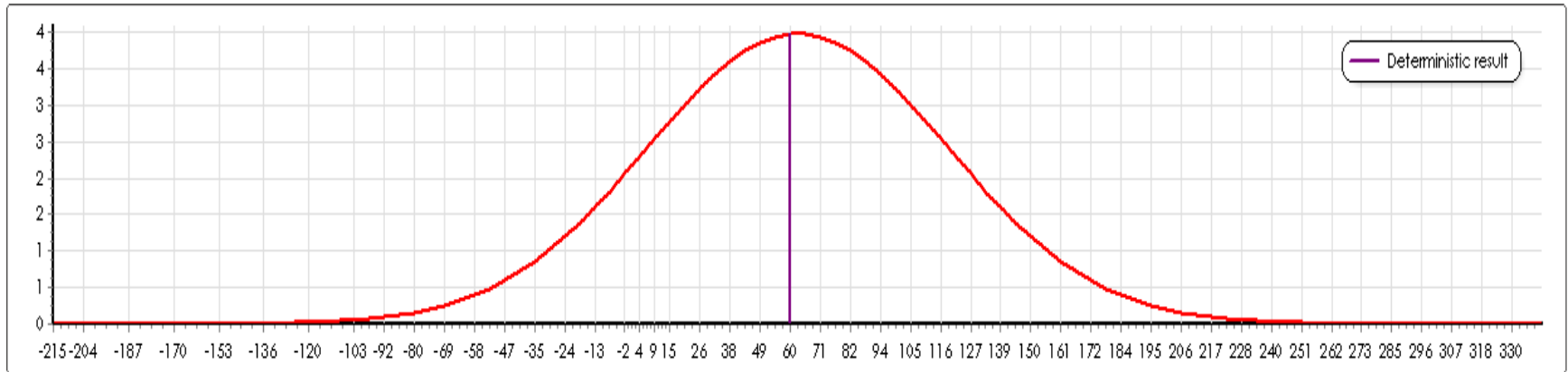
► Inkrementální trojúhelník vyplacených škod 13x13

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	2448	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3705	206	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4718	43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	4094	35	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	3052	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	4238	17	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	3553	39	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0
7	3411	31	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1786	58	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1266	21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	1738	23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	2518	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	2974	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

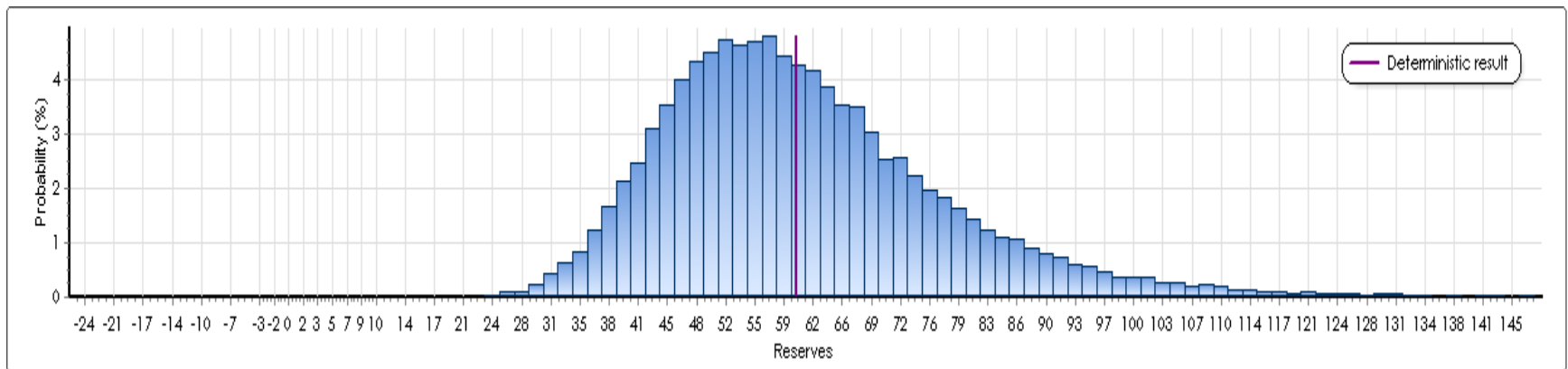


Mack Chain-Ladder vs. RJMCMC (Pojištění plodin)

Hustota rezervy - Mack

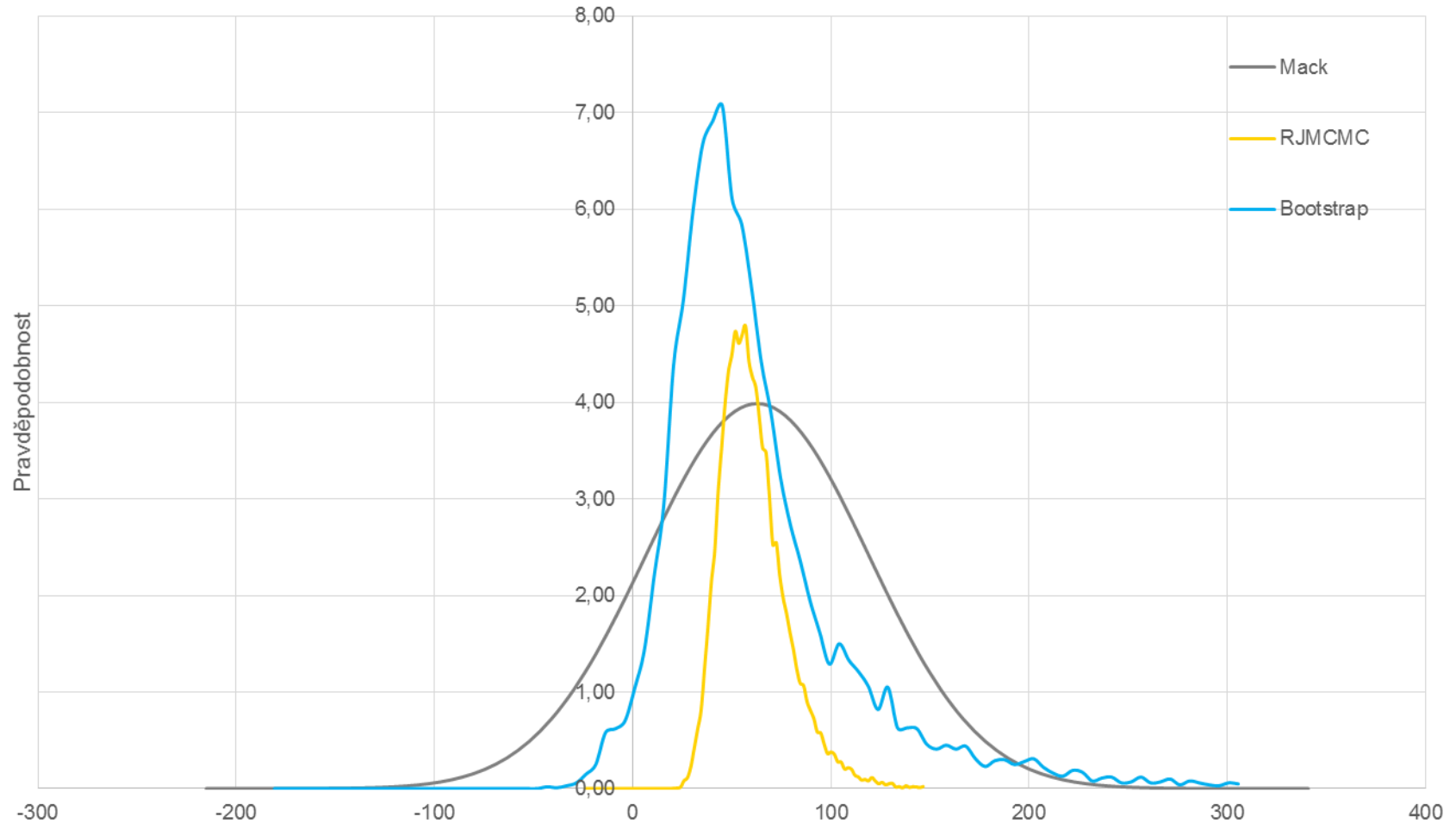


Hustota rezervy - RJMCMC



Mack Chain-Ladder vs. RJMCMC (Pojištění plodin)

Porovnání hustoty rezerv

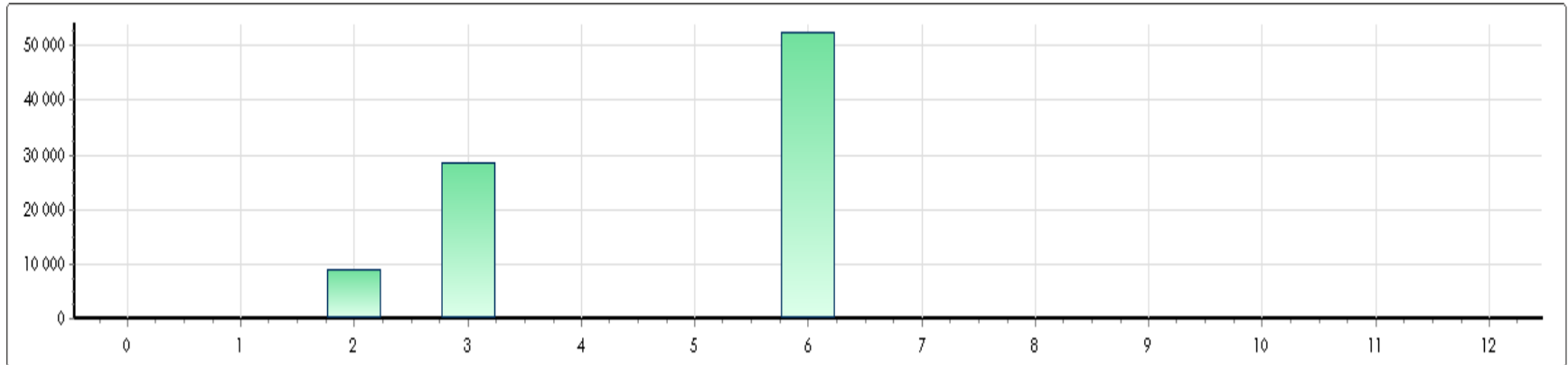


RJMCMC – porovnání (Pojištění plodin)

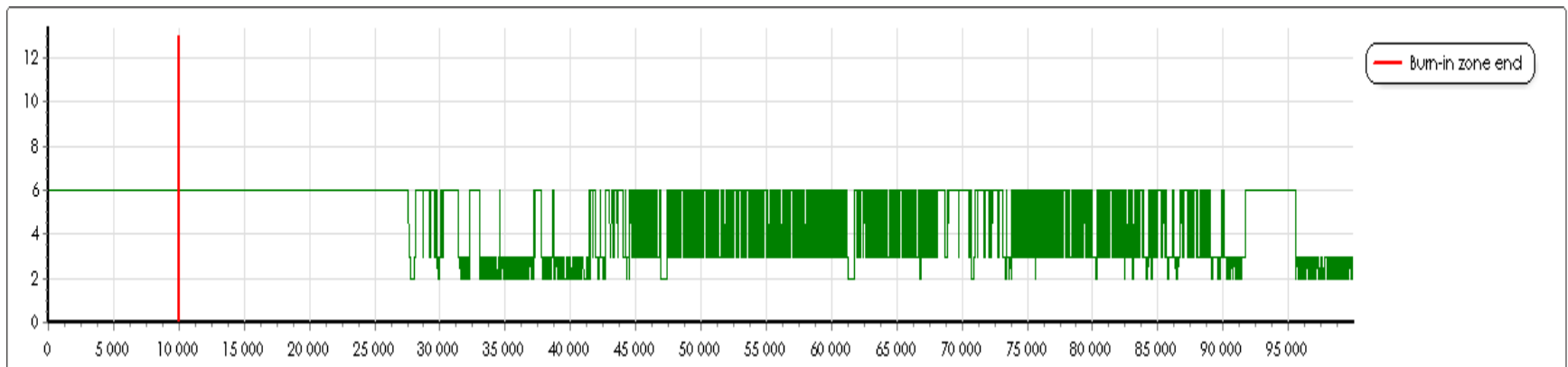
Rok	RJMCMC		Mack CL		Bootstrap	
	Střední hodnota	Směrodatná odchylka	Střední hodnota	Směrodatná odchylka	Střední hodnota	Směrodatná odchylka
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7	3,33	3,40	3,55	10,65	3,35	10,96
8	1,76	1,81	1,89	7,56	2,02	8,52
9	1,24	1,26	1,32	6,26	1,43	7,06
10	1,89	1,83	1,80	7,38	1,57	8,20
11	4,17	2,91	3,84	10,08	3,59	12,68
12	47,98	10,48	47,63	51,08	47,97	41,51
Celkem	60,36	17,23	60,04	56,15	59,93	49,11

RJMCMC – detailní výsledky (Pojištění plodin)

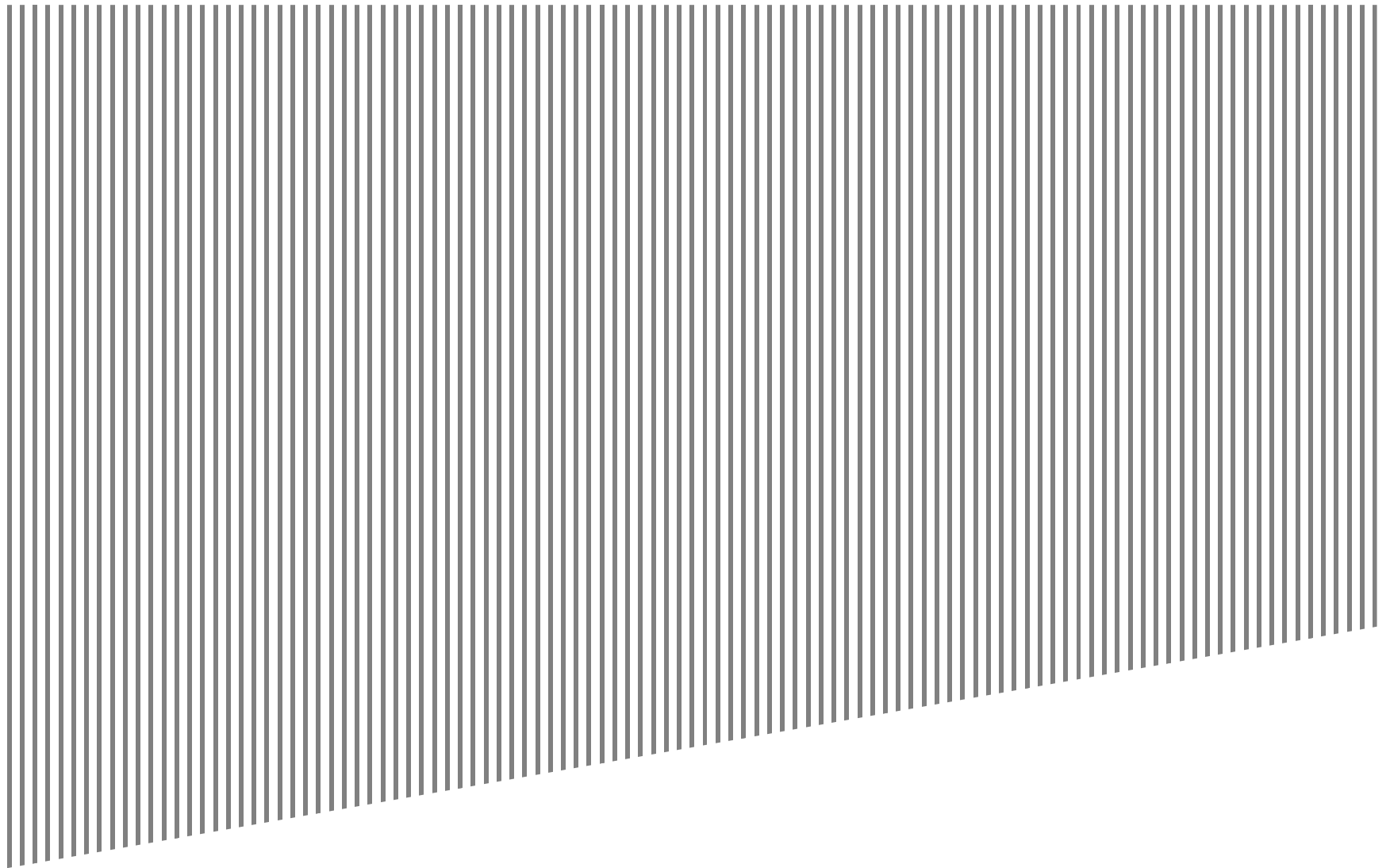
Index useknutí



Realizace indexu useknutí



Závěr



Závěr

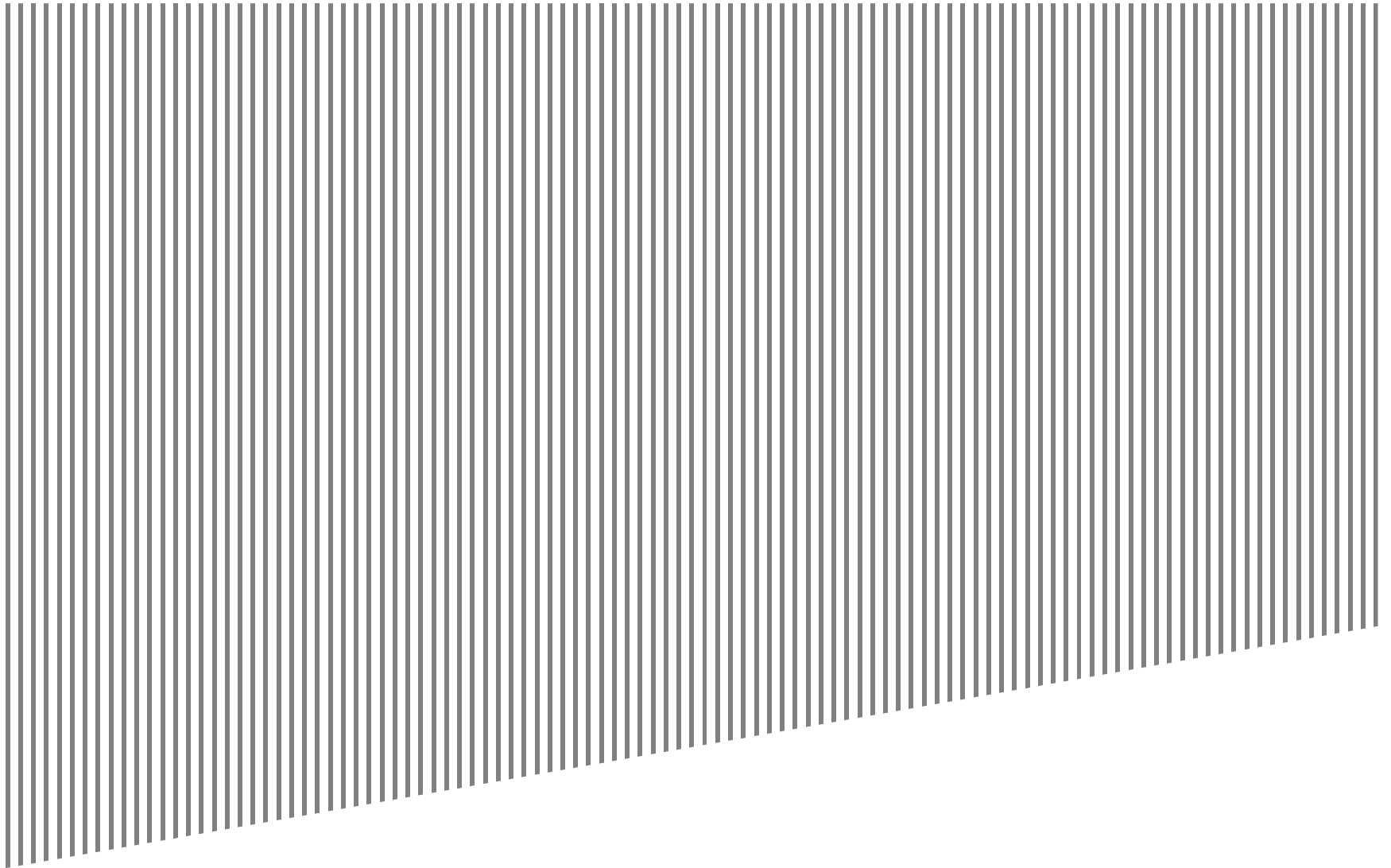


- Obecně má menší směrodatnou odchylku v porovnání s dalšími metodami
- Může vést ke snížení kapitálového požadavku



- Náročná na implementaci a interpretaci
- Metoda je velmi citlivá na záporné a nulové inkrementy

Appendix



Pravděpodobnost přijetí

- $\alpha(t \rightarrow *)$ spočteme jako minimum z jedné a

$$\frac{u(\mathcal{M}_{k^*}, \boldsymbol{\theta}_{k^*}^* | X) q(k^{(t)} | k^*) g_{k^* \rightarrow k^{(t)}}(u^* | \boldsymbol{\theta}_{k^*}^*)}{u(\mathcal{M}_{k^{(t)}}, \boldsymbol{\theta}_{k^{(t)}}^{(t)} | X) q(k^* | k^{(t)}) g_{k^{(t)} \rightarrow k^*}(u^{(t)} | \boldsymbol{\theta}_{k^{(t)}}^{(t)})} \left| \frac{\partial T_{k^{(t)} \rightarrow k^*}(\boldsymbol{\theta}_{k^{(t)}}^{(t)}, u^{(t)})}{\partial(\boldsymbol{\theta}_{k^{(t)}}^{(t)}, u^{(t)})} \right|$$

Detail kroku 2b)

$$\alpha(t \rightarrow *) = \min \left\{ 1, \prod_{i=0}^{n-k} \left[\frac{e^{-\frac{\mu_i^{(t)} \gamma_k^*}{\varphi}} (\gamma_k^*)^{\frac{X_{i,k}}{\varphi}}}{e^{-\frac{\mu_i^{(t)} \gamma_k^{(t)}}{\varphi}} (\gamma_k^{(t)})^{\frac{X_{i,k}}{\varphi}}} \right] \frac{\frac{(v/c_k)^v}{\Gamma(v)} (\gamma_k^*)^{v-1} e^{-\frac{v}{c_k} \gamma_k^*}}{\frac{(v^*/\gamma_k^{(t)})^{v^*}}{\Gamma(v^*)} (\gamma_k^*)^{v^*-1} e^{-\frac{v^*}{\gamma_k^{(t)}} \gamma_k^*}} \right\}$$

k^*

$$k^{(t)} + 1 \quad k^{(t)} - 1 \quad \gamma_k^{(t)} = \exp\{\alpha^{(t)} - k^{(t)}\beta^{(t)}\} \quad \gamma_k^* = u(t)$$

$$k^{(t)} - 1 \quad k^{(t)} + 1 \quad \gamma_{k^*}^* = \exp\{\alpha^{(t)} - k^*\beta^{(t)}\}$$

$$\alpha(t \rightarrow *) = \min \left\{ 1, \prod_{i=0}^{n-k^*} \left[\frac{e^{-\frac{\mu_i^{(t)} \gamma_{k^*}^*}{\varphi}} (\gamma_{k^*}^*)^{\frac{X_{i,k^*}}{\varphi}}}{e^{-\frac{\mu_i^{(t)} \gamma_{k^*}^{(t)}}{\varphi}} (\gamma_{k^*}^{(t)})^{\frac{X_{i,k^*}}{\varphi}}} \right] \frac{\frac{(v^*/\gamma_{k^*}^*)^{v^*}}{\Gamma(v^*)} (\gamma_{k^*}^{(t)})^{v^*-1} e^{-\frac{v^*}{\gamma_{k^*}^*} \gamma_{k^*}^{(t)}}}{\frac{(v/c_{k^*})^v}{\Gamma(v)} (\gamma_{k^*}^{(t)})^{v-1} e^{-\frac{v}{c_{k^*}} \gamma_{k^*}^{(t)}}} \right\}$$

Zdroje

- Carrato, A., McGuire, G., Scarth, R. (2016). A Practitioner's Introduction to Stochastic Reserving.
- England, P. D., Verrall, R. J., Wüthrich, M. V. (2012). Bayesian Overdispersed Poisson Model and the Bornhuetter-Ferguson Claim Reserving Method. *Annals of Actuarial Science*, 6(2), pp. 258-283. doi: 10.1017/S1748499512000012
- Verrall, R.J., Hössjer, O., Björkwall, S. (2012). Modelling Claims Run-Off with Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo Methods. *ASTIN Bulletin*, 42, pp 35-58 doi:10.2143/ AST.42.1.2160711
- Verrall, R.J., Wüthrich, M.V. (2012). Reversible jump Markov chain Monte Carlo method for parameter reduction in claims reserving. *North American Actuarial Journal*, 16(2), pp. 240-259. doi: 10.1080/10920277.2012.10590639
- Wüthrich, M. V., Merz M. (2006). *Stochastic Claims Reserving Methods in Non-Life Insurance*.