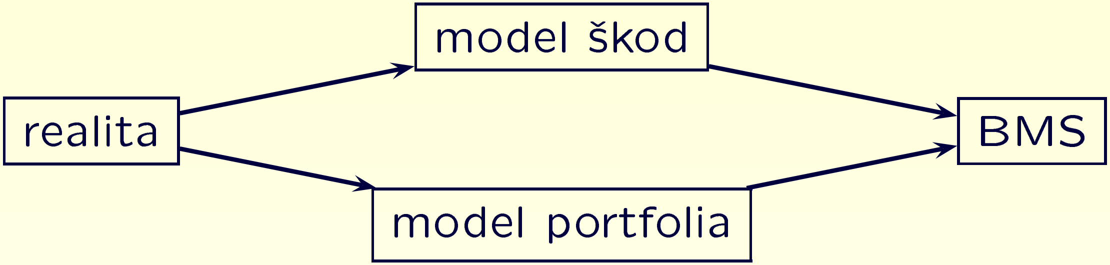
Systémy bonus malus: optimalizace v praxi

Mgr. Jan Šváb, Ph. D.

Seminář z aktuárských věd, 23.11.2007

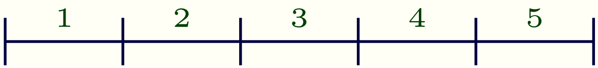
agenda

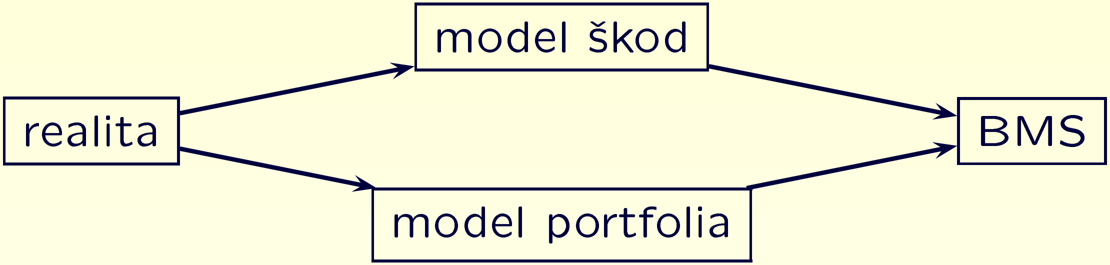
- definice
  - definice modelu škod
  - definice modelu portfolia
  - definice BMS
- vlastnosti BMS
  - AL,FYS, rovnováha
  - CV,Q
  - ROC,TV
  - ELAS
- hlad po bonusu a spoluúčast
- optimální BMS
  - optimalizace pravidel
  - optimalizace sazbovací funkce
  - optimalizace pravidel i funkce BMS zároveň
  - optimalizace elasticity



- portfolio aproximujeme modelem škod a modelem stáří rizik.
- a znovu aproximujeme systémem BMS
- Měření času:

čas portfolia t

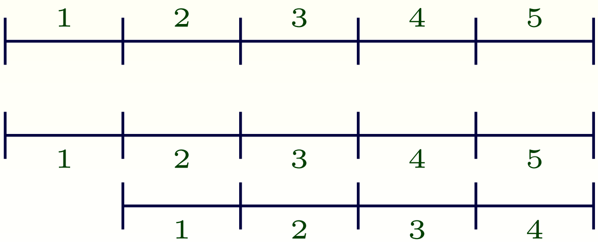




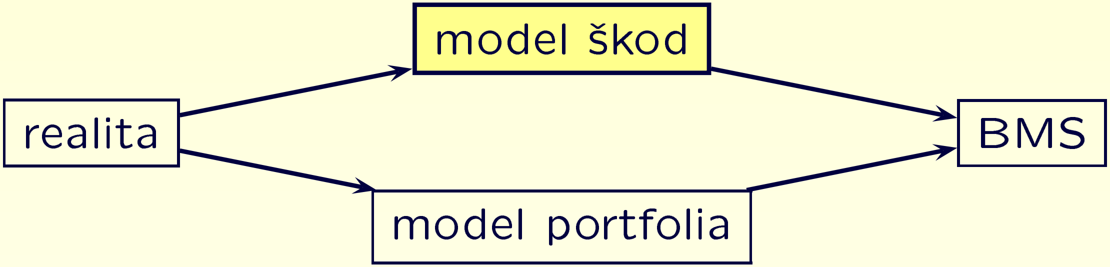
- portfolio aproximujeme modelem škod a modelem stáří rizik.
- a znovu aproximujeme systémem BMS
- Měření času:

čas portfolia t

čas rizik n

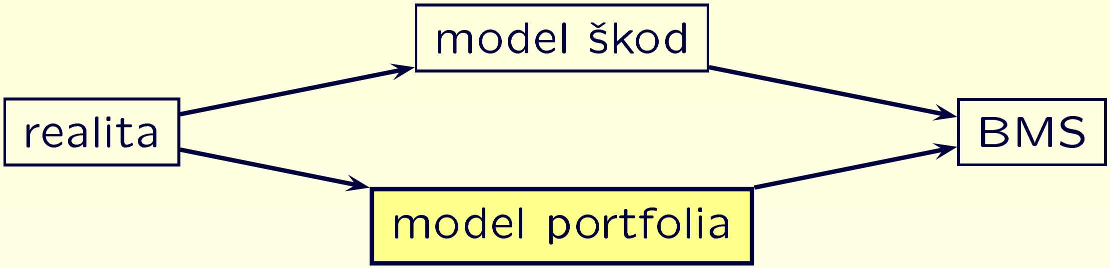


definice BMS
vlastnosti BMS
hlad po bonusu
optimalizace BMS



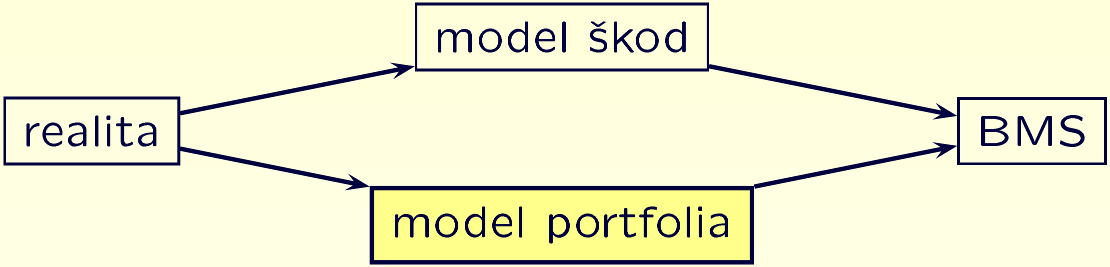
- M_n počet škod z období n, iid pod. k $\Theta = \theta$
- Y_{nj} velikosti škod pro $j = 1, \dots, M_n$, iid a nez. na $(\Theta, M_1, M_2, \dots)$
- kolektivní model: $X_n = \sum_{j=0}^{M_n} Y_{nj}$

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS



- **škodní frekvence**: n. v. Θ, d. f. $U(\theta)$, nez. na stáří rizik
- **stáří rizik**: n. v. N_t, prsti. $w_n(t)$, nez. na ŠF
- **stáří systému**: n. v. Ω, prsti. ω_t
- **portfolio** je $\mathcal{F} = \left(U, \left\{\{w_n(t)\}_{n=1}^{\infty}, \omega_t\right\}_{t=1}^{\infty}\right)$

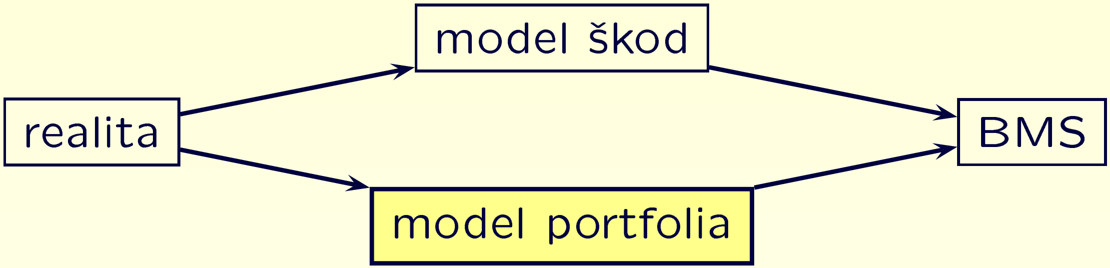
definice BMS
vlastnosti BMS
hlad po bonusu
optimalizace BMS



- uzavřené portfolio, $\mathcal{U}$

$$w_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = t \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- není-li uzavřené je otevřené, $\mathcal{O}$
- as. rozdělení stáří rizik $w_n = \lim_{t \to \infty} w_n(t)$
- ex-li pro $\forall n \in \mathbb{N}$ a def-li n. v. (zn. N_∞), $(U, \{w_n\}_{n=1}^{\infty})$ nazveme as. portfolio



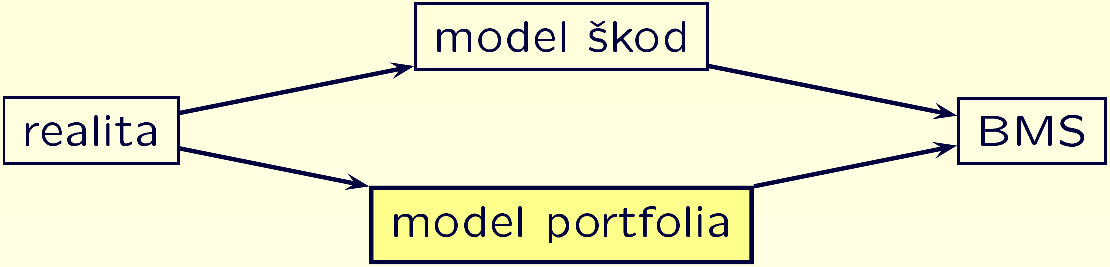
- v Norberg et al. (1981) jen w_n (orig. zn.)
- zde mezikrok s $w_n(t)$ a analogicky váhy ω_t

1) Zobecnění z uzavřeného na otevřené portfolio

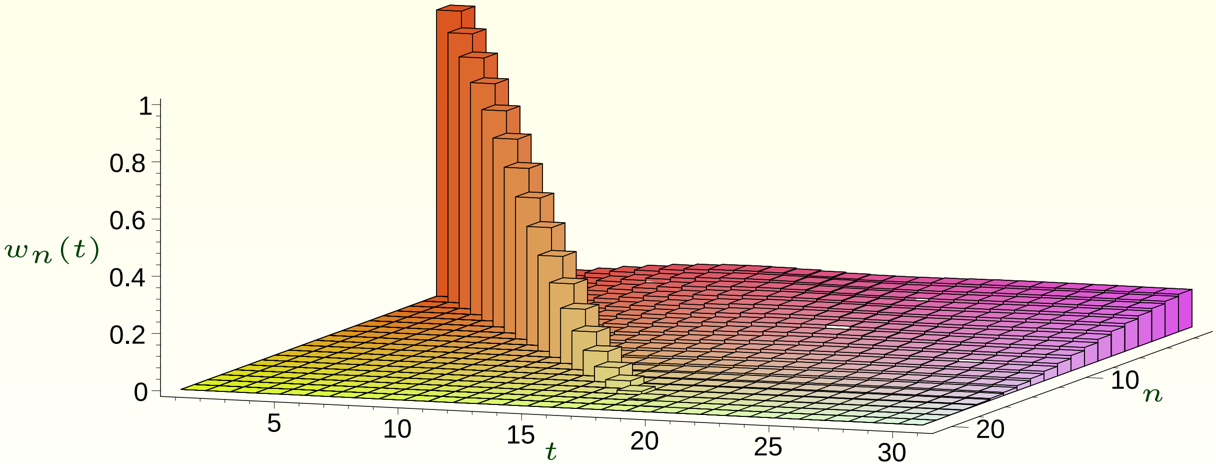
pro uz. portfolio naše $\omega_t = w_t$ Norbergovy

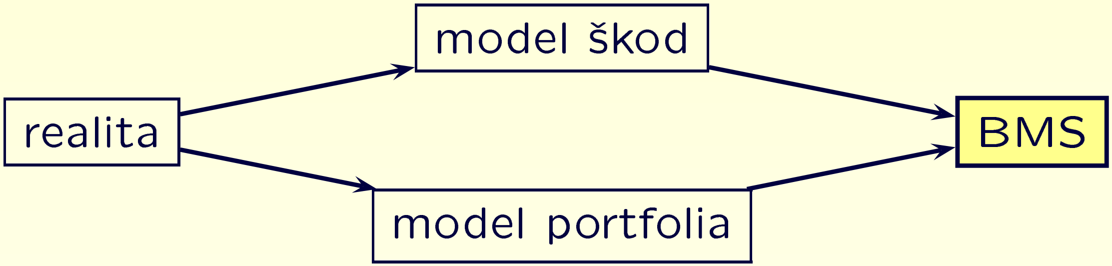
2) Norbergovo ustálené port. jako spec. případ

pro as. portfolio naše $w_t = w_t$ Norbergovy


model škod
realita
BMS
model portfolia

Příklad:


$w_n(t)$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
5
10
15
20
25
30
t
10
20
n

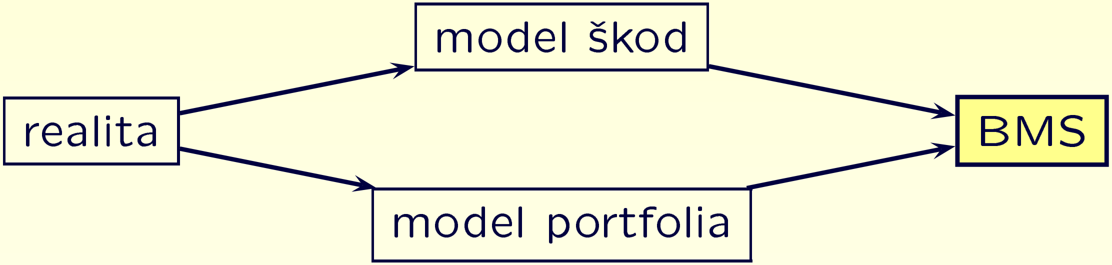


- historie rizika do času n je $(M_0, Y_{00} \equiv 0)$
  $\boldsymbol{\Xi}_n = (M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, Y_{00}, Y_{10}, \dots, Y_{1M_1}, \dots, Y_{n-10}, \dots, Y_{n-1M_{n-1}})' \in \mathscr{H}_n$

- množina stavů $\mathscr{K}_t \subset \mathbb{R}^\alpha$, kde $\alpha \in \mathbb{N}$

- sazbovací základna (t, n) je $Z_{tn} : \mathscr{H}_n \mapsto \mathscr{K}_t$
  tj. historie $\mapsto$ stav (zjed. $Z_n = Z_{tn}, \forall t$)

- sazbovací funkce (t, n) je $a_{tn} : \mathscr{K}_t \mapsto \mathbb{R}_+$ tj.
  stav $\mapsto$ pojistné (zjed. $a_t = a_{tn}, \forall n$)



- **Zobecněný systém bonus malus** je dvojice posloupností $S = \left(\{Z_{t\bullet}\}_{t=1}^{\infty}, \{a_{t\bullet}\}_{t=1}^{\infty}\right)$, $Z_{t\bullet} = \{Z_{tn} | n \in \mathbb{N}\}$, $a_{t\bullet} = \{a_{tn} | n \in \mathbb{N}\}$

- **Systém bonus malus (BMS)** je dvojice $S = \left(\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_t\}_{t=1}^{\infty}\right)$

- $Z_{t1}((0,0)') = k_t \in \mathscr{K}_t$ je **základní stav**

Asymptotické sazbovací základny a BMS

Jeli S BMS ($\mathscr{K}_t = \mathscr{K}$), pak

- $Z_{\mathcal{U}}^{(\infty)}$ je as. sazbovací základna uz. portfolia
  $$\mathrm{P}_\theta\left(Z_{\mathcal{U}}^{(\infty)} = j\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_\theta\left(Z_n = j\right), \forall j \in \mathscr{K}$$
- $Z_{\mathcal{O}}^{(\infty)}$ je as. sazbovací základna ot. portfolia
  $$\mathrm{P}_\theta\left(Z_{\mathcal{O}}^{(\infty)} = j\right) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}_\theta\left(Z_{N_t} = j\right)$$
- BMS $\left(Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)}, a\right)$ se nazývá as. BMS, kde
  $Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)}$ je as. saz. základna a a saz. funkce

Pro $\mathcal{F}$ portfolio máme $Z_{N_t} \to Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)}$ pro $t \to \infty$

(tj. pro uzavřené i otevřené portfolio)

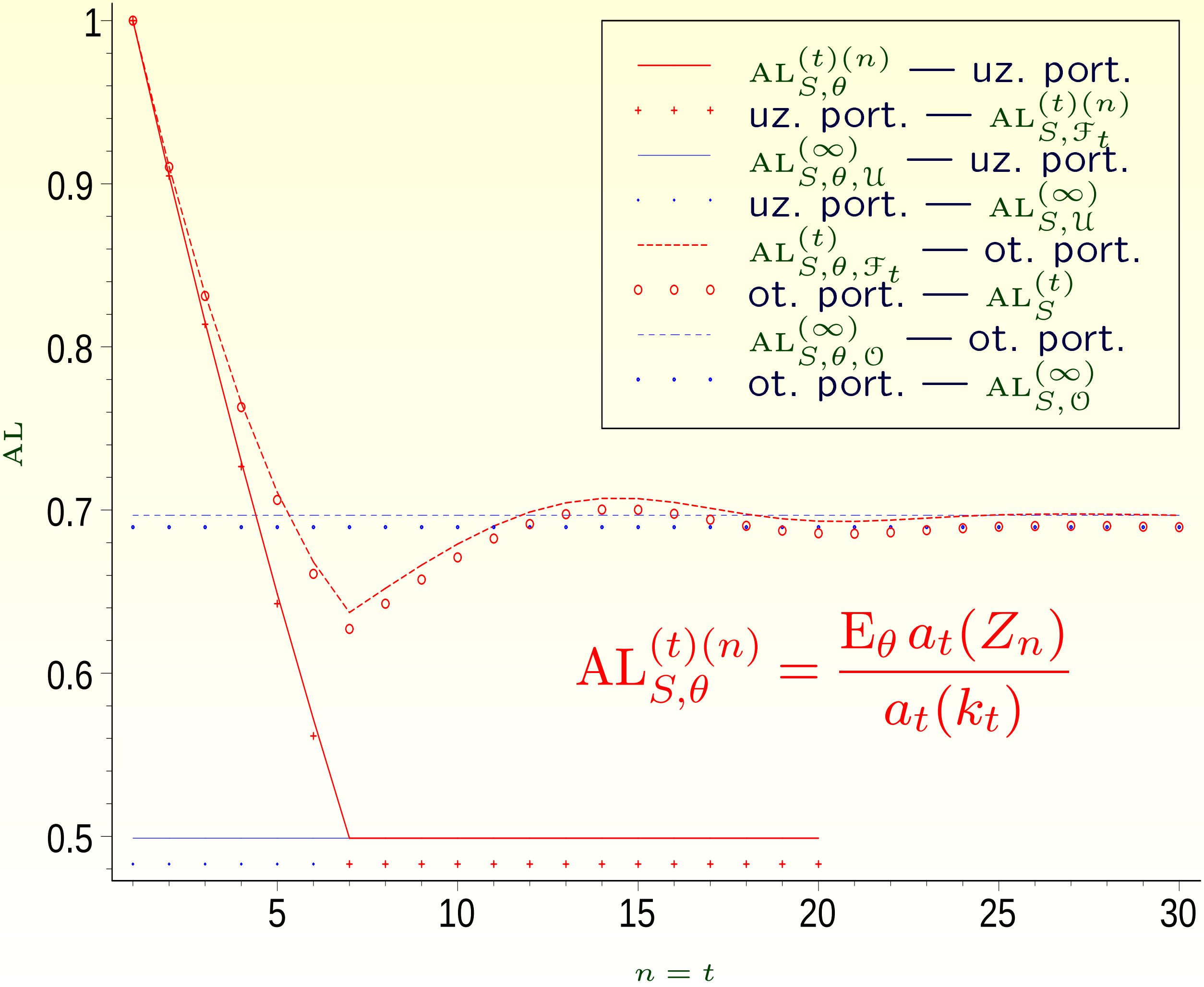
☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

Příklad — Keňský BMS

stupeň (Z_{n-1})	úroveň pojistného	nový stupeň (Z_n) $M_{n-1} = 0$	nový stupeň (Z_n) $M_{n-1} \geq 1$
1	100%	2	1
2	90%	3	1
3	80%	4	1
4	70%	5	1
5	60%	6	1
6	50%	7	1
7	40%	7	1

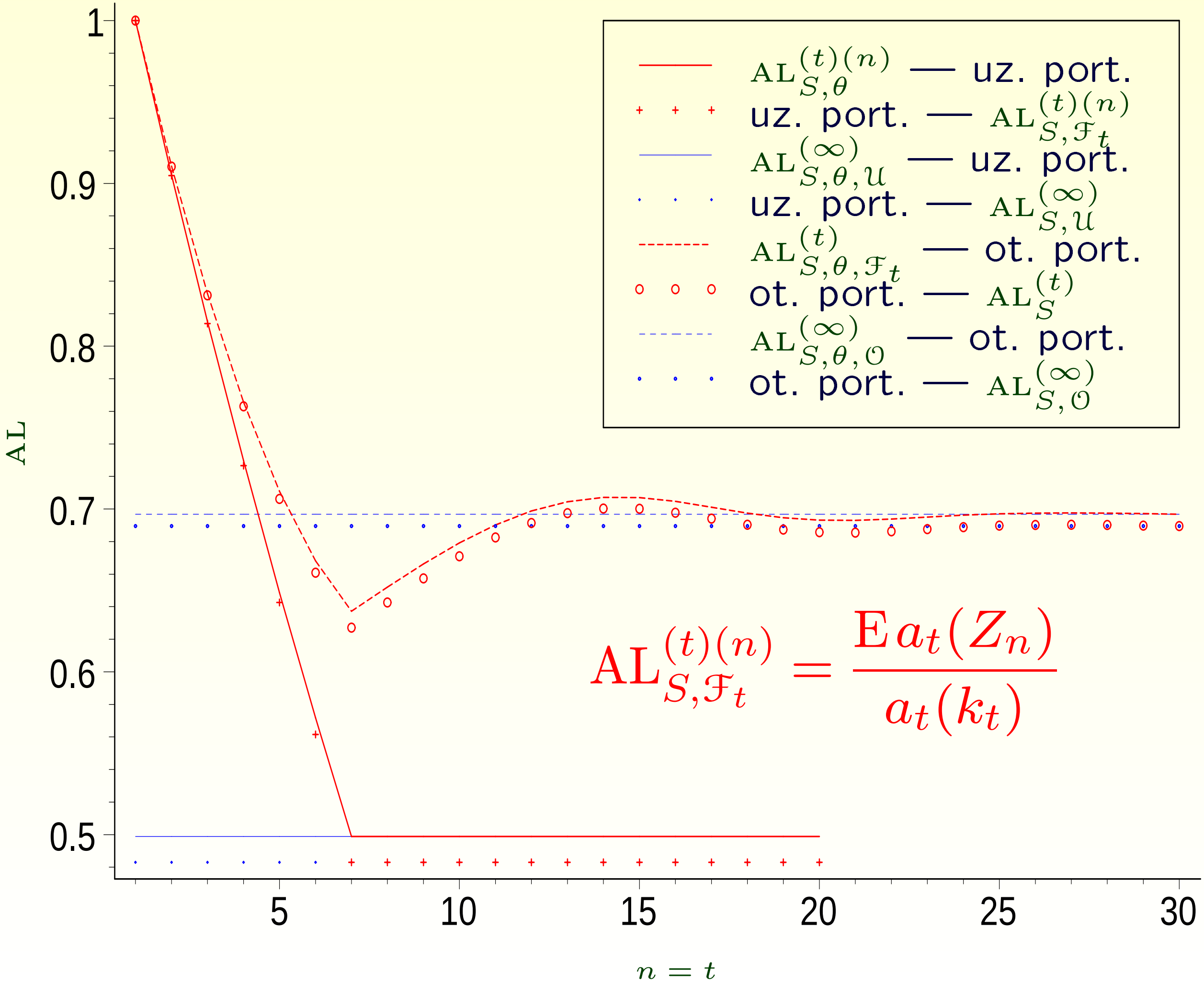
agenda

- definice
  - definice modelu škod
  - definice modelu portfolia
  - definice BMS
- vlastnosti BMS
  - AL,FYS, rovnováha
  - CV,Q
  - ROC,TV
  - ELAS
- hlad po bonusu a spoluúčast
- optimální BMS
  - optimalizace pravidel
  - optimalizace sazbovací funkce
  - optimalizace pravidel i funkce BMS zároveň
  - optimalizace elasticity



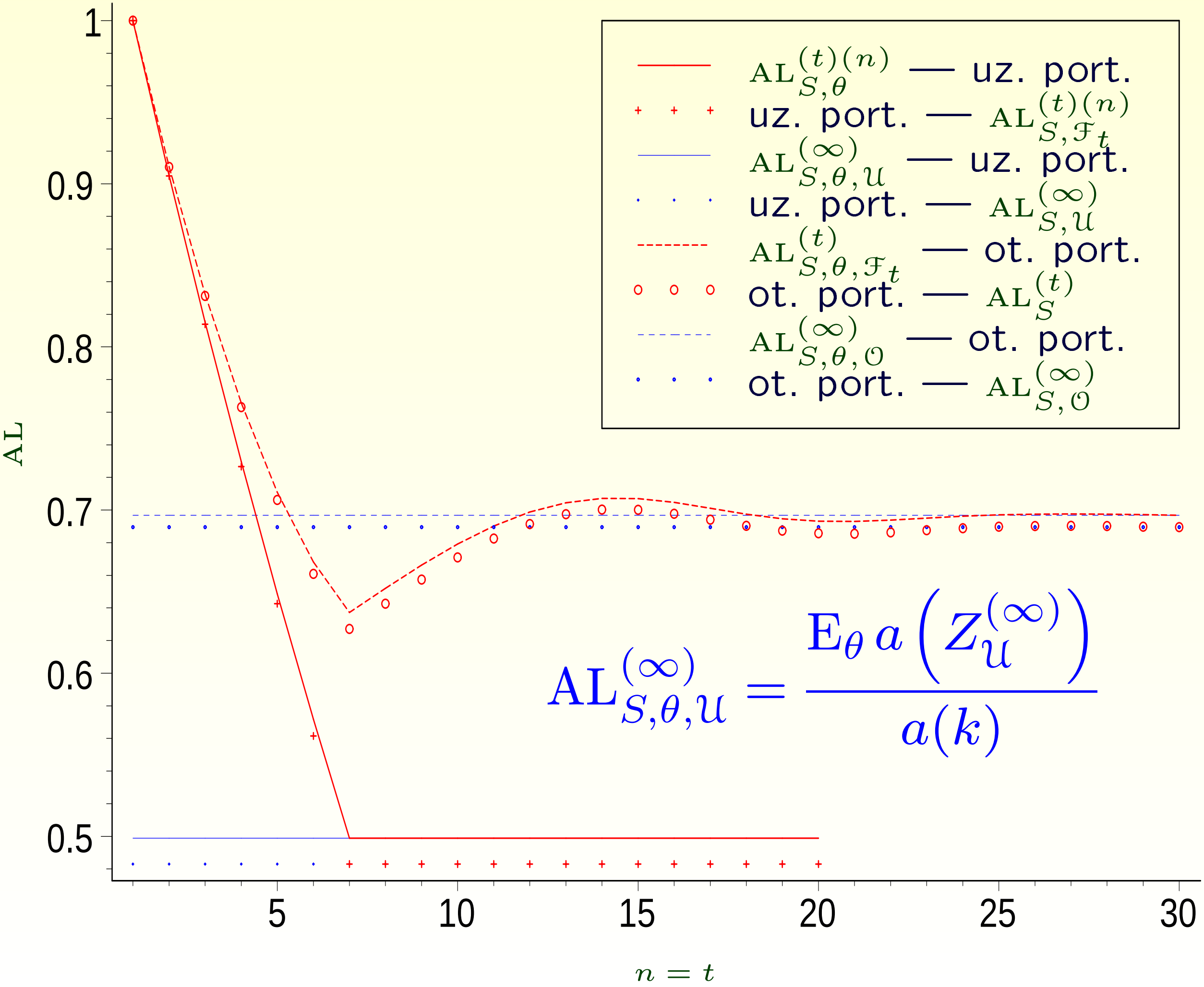
$$\mathrm{AL}_{S,\theta}^{(t)(n)} = \frac{\mathrm{E}_\theta\, a_t(Z_n)}{a_t(k_t)}$$

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS



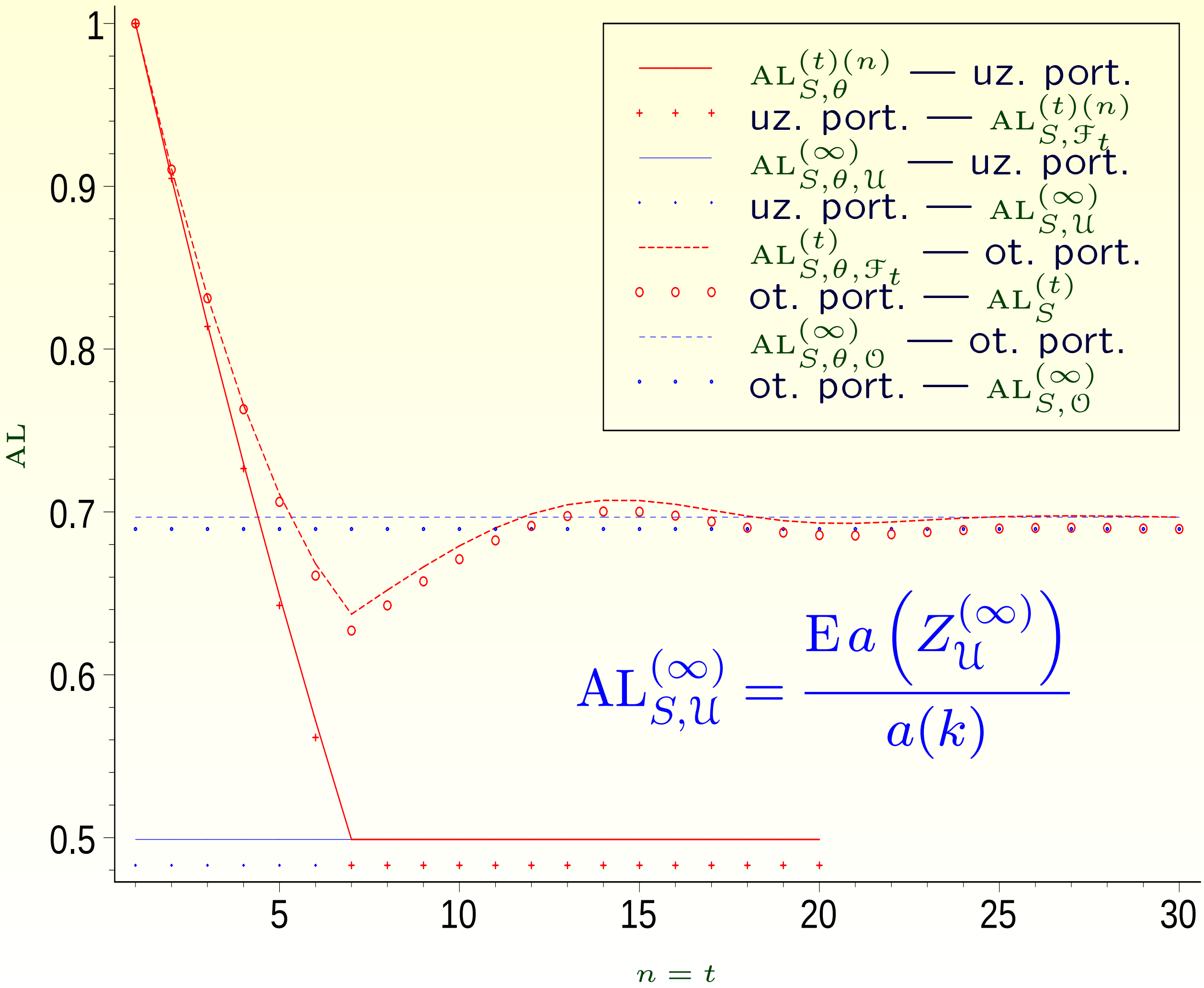
$$AL_{S,\mathcal{F}_t}^{(t)(n)} = \frac{\mathrm{E}\, a_t(Z_n)}{a_t(k_t)}$$

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS



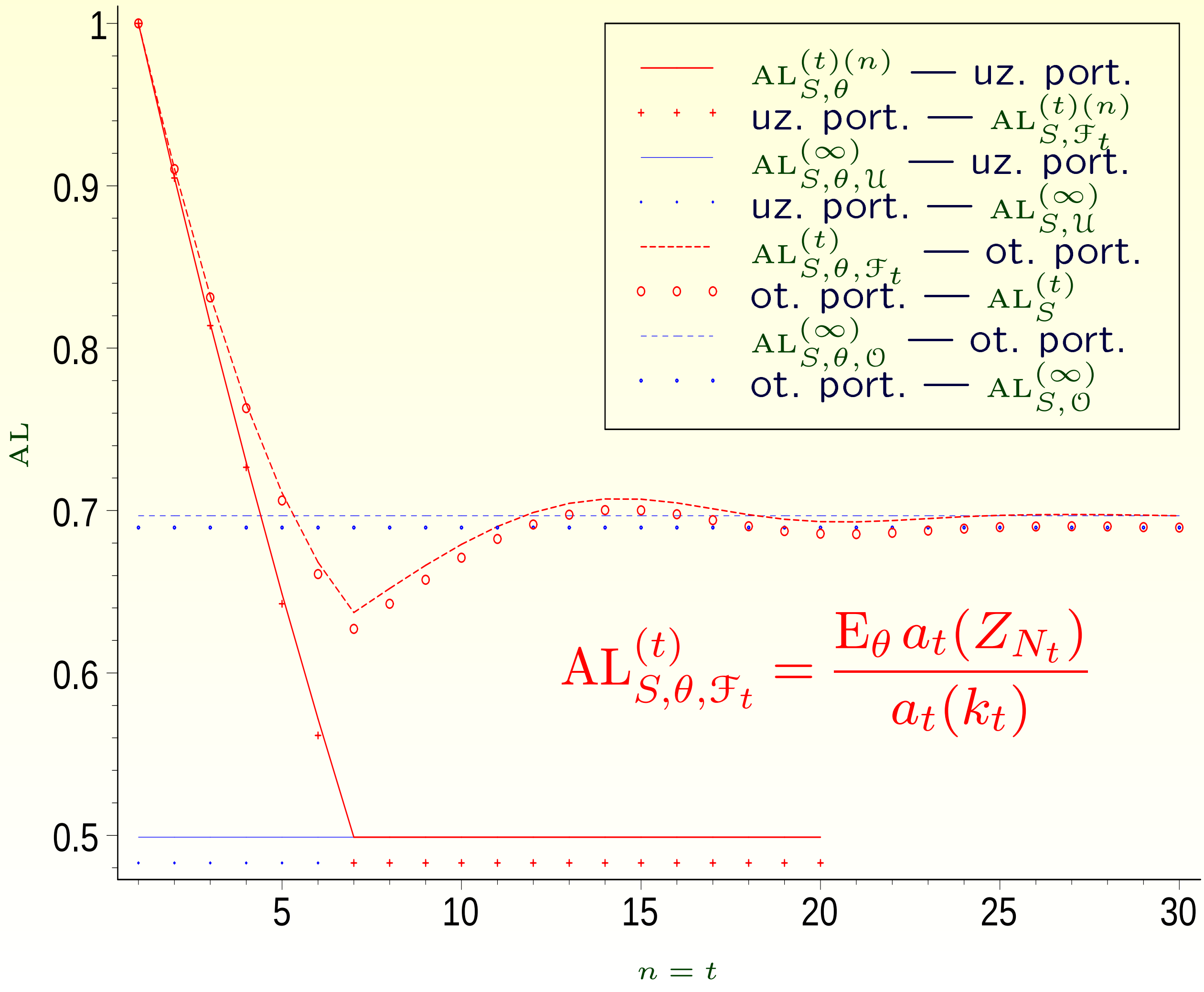
$$\mathrm{AL}^{(\infty)}_{S,\theta,\mathcal{U}} = \frac{\mathrm{E}_\theta\, a\left(Z^{(\infty)}_{\mathcal{U}}\right)}{a(k)}$$

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS



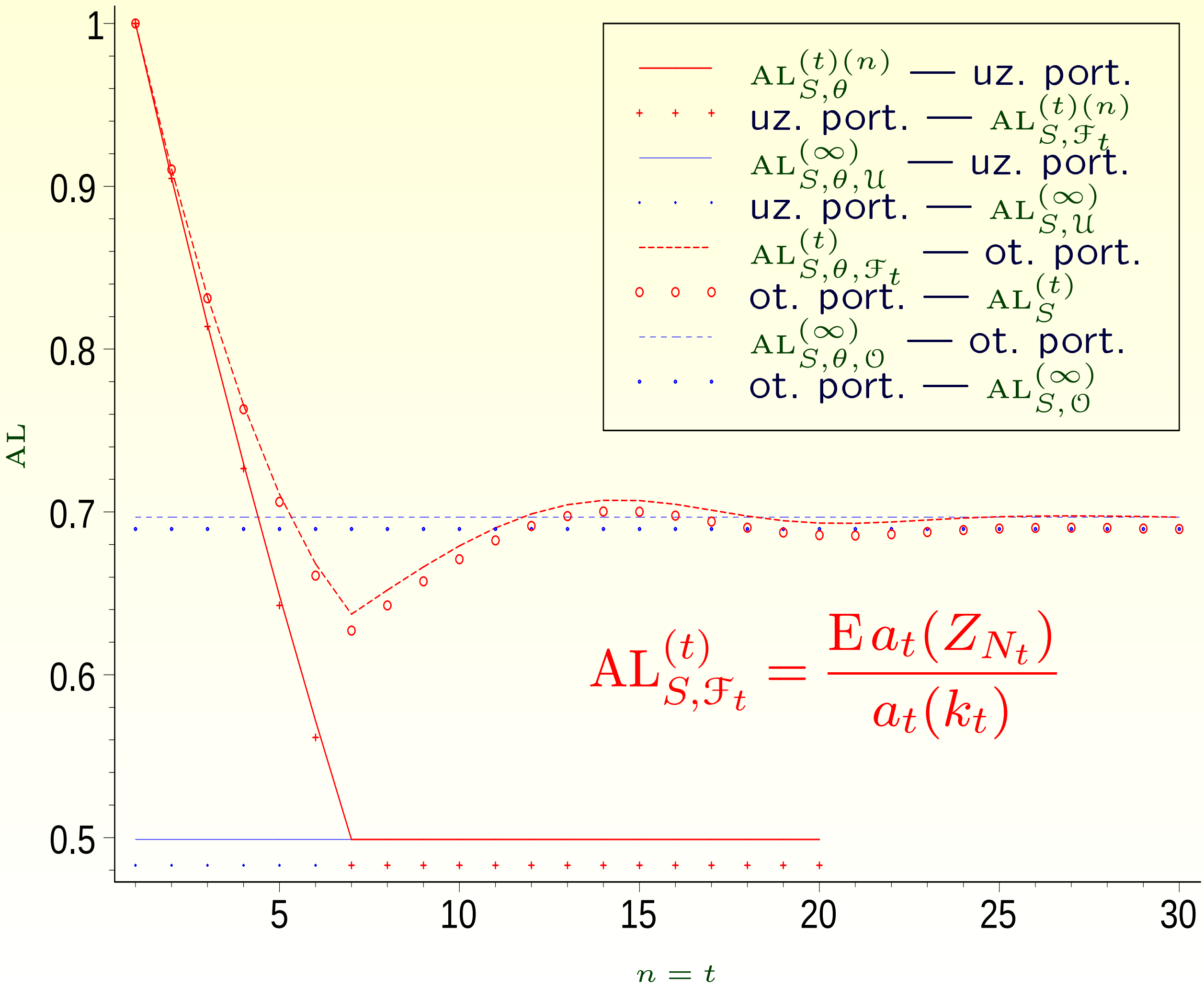
$$\mathrm{AL}^{(\infty)}_{S,\mathcal{U}} = \frac{\mathrm{E}\,a\left(Z^{(\infty)}_{\mathcal{U}}\right)}{a(k)}$$

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

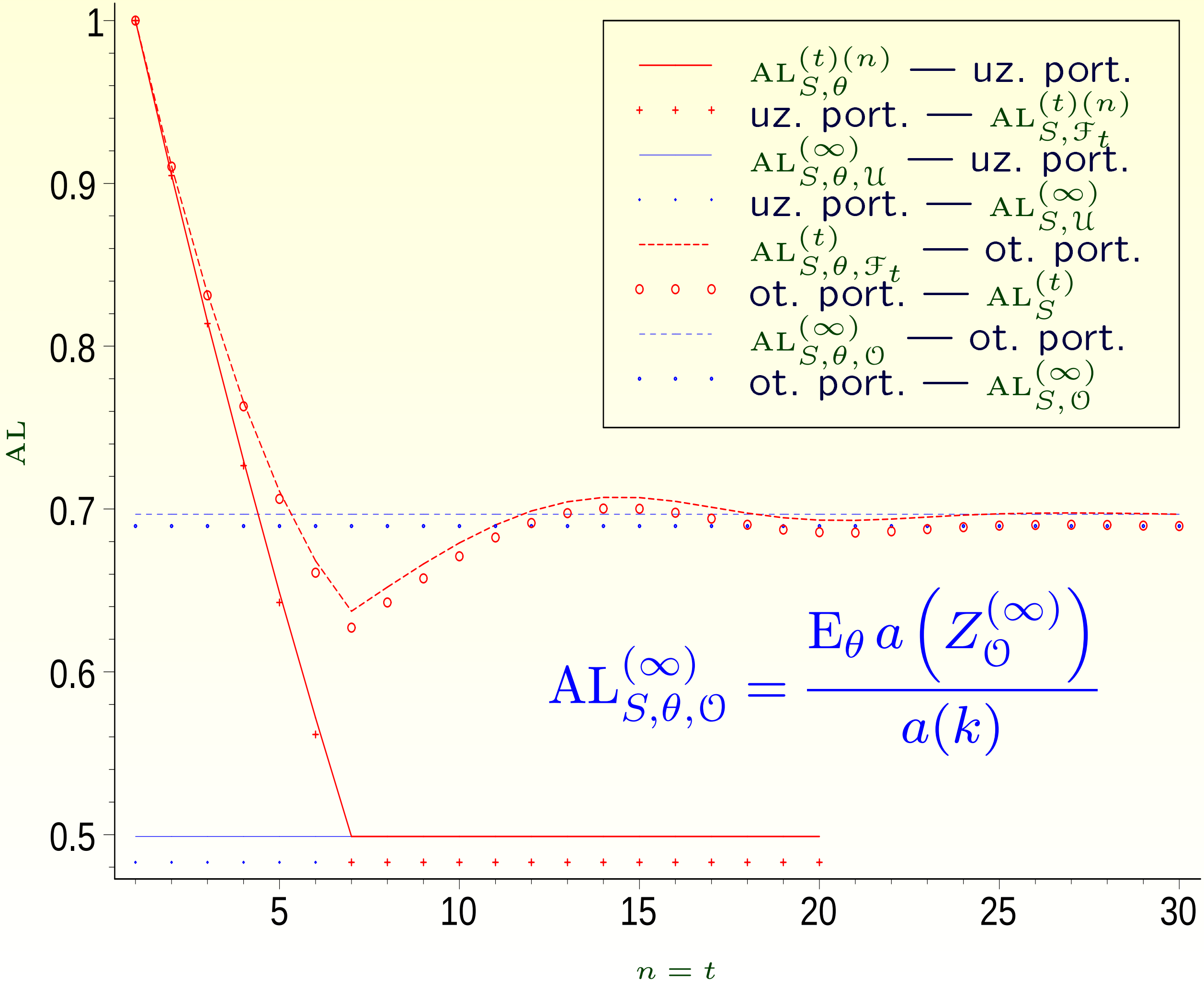


$$\mathrm{AL}^{(t)}_{S,\theta,\mathcal{F}_t} = \frac{\mathrm{E}_\theta\, a_t(Z_{N_t})}{a_t(k_t)}$$

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

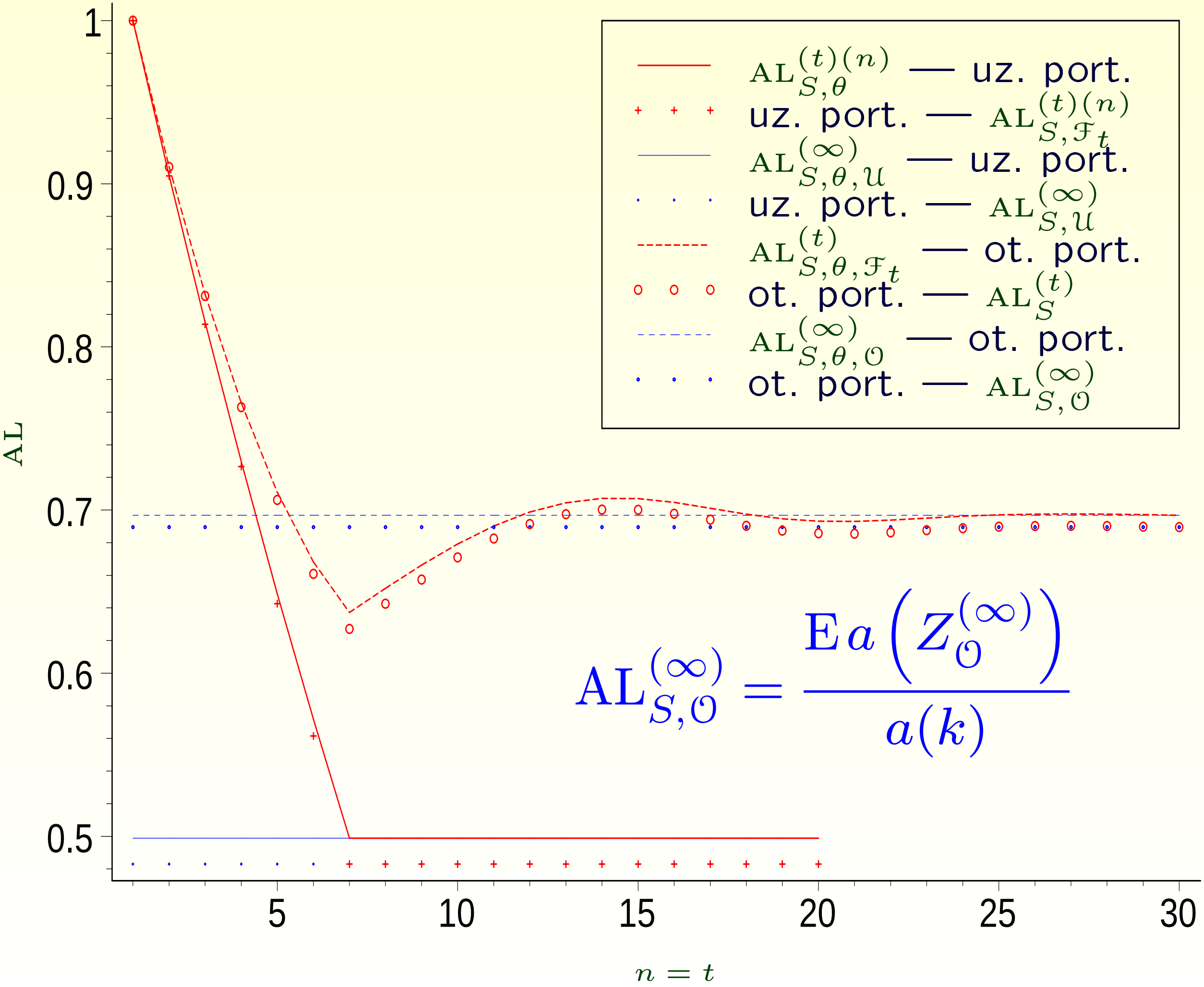


$$\mathrm{AL}^{(t)}_{S,\mathcal{F}_t} = \frac{\mathrm{E}\, a_t(Z_{N_t})}{a_t(k_t)}$$



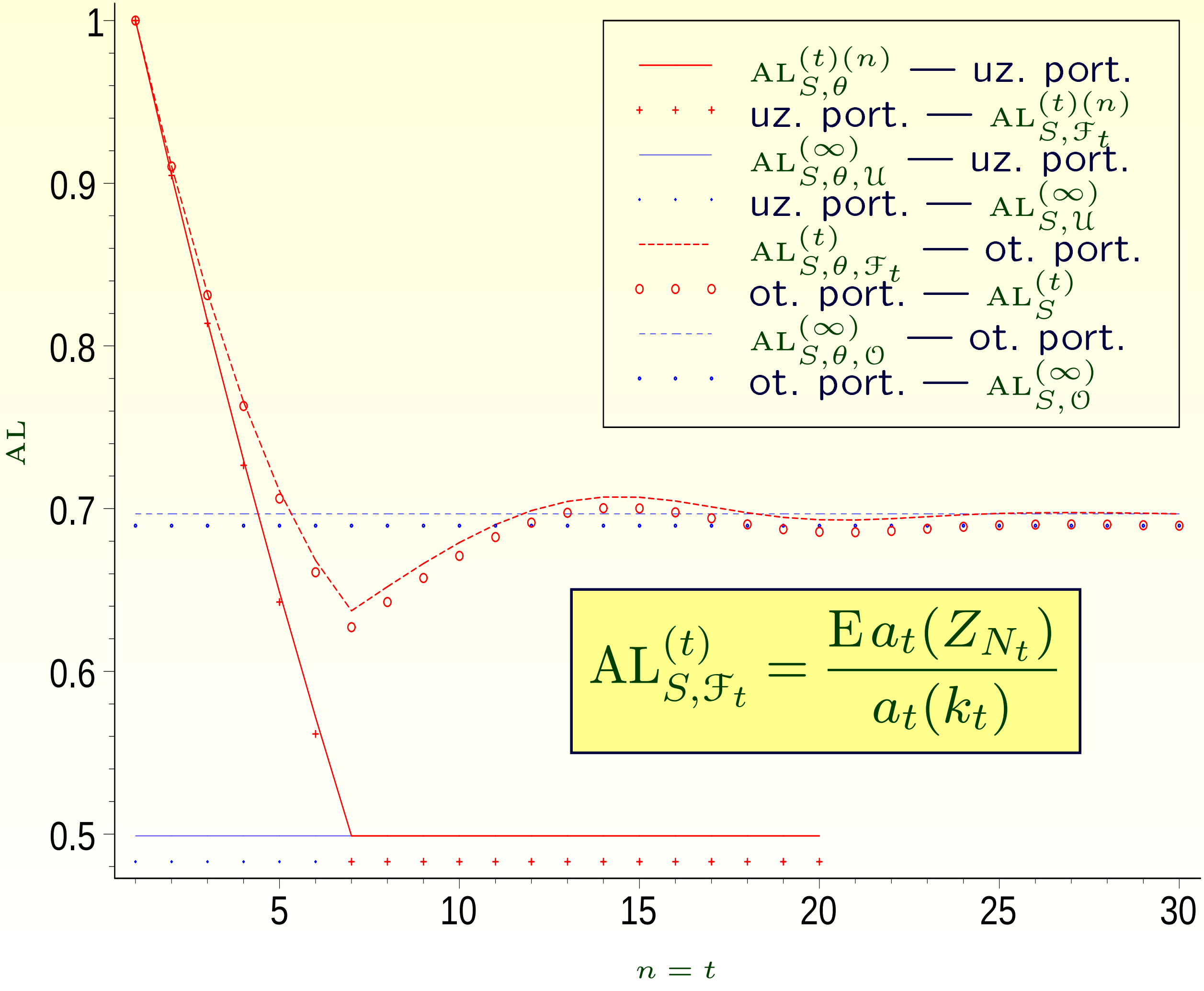
$$\mathrm{AL}^{(\infty)}_{S,\theta,\mathcal{O}} = \frac{\mathrm{E}_\theta\, a\left(Z^{(\infty)}_{\mathcal{O}}\right)}{a(k)}$$

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS



$$\mathrm{AL}^{(\infty)}_{S,\mathcal{O}} = \frac{\mathrm{E}\, a\left(Z^{(\infty)}_{\mathcal{O}}\right)}{a(k)}$$

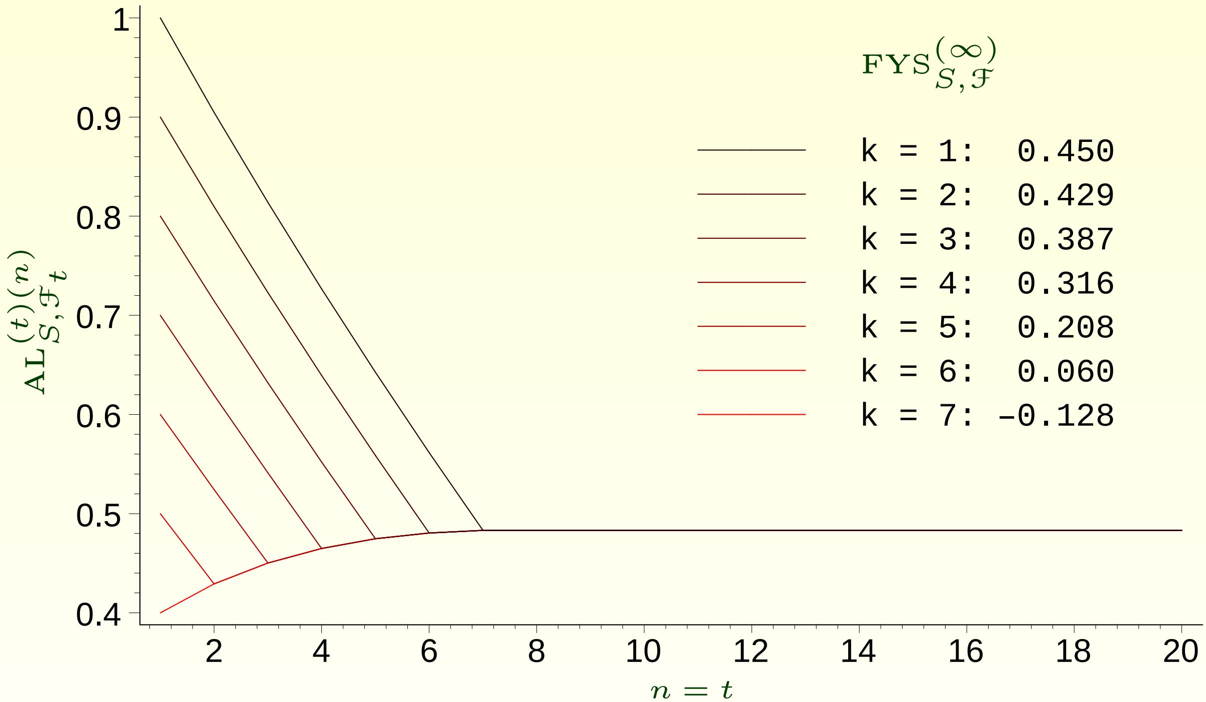
☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS



$$\mathrm{AL}^{(t)}_{S,\mathcal{F}_t} = \frac{\mathrm{E}\, a_t(Z_{N_t})}{a_t(k_t)}$$

definice BMS
vlastnosti BMS
hlad po bonusu
optimalizace BMS

AL v čase a FYS podle k



$$\mathrm{FYS}^{(\infty)}_{S,\mathcal{F}}(t) = \frac{\mathrm{AL}^{(t)(1)}_{S,\mathcal{F}_t} - \mathrm{AL}^{(\infty)}_{S,\mathcal{F}}}{\mathrm{AL}^{(\infty)}_{S,\mathcal{F}}},$$

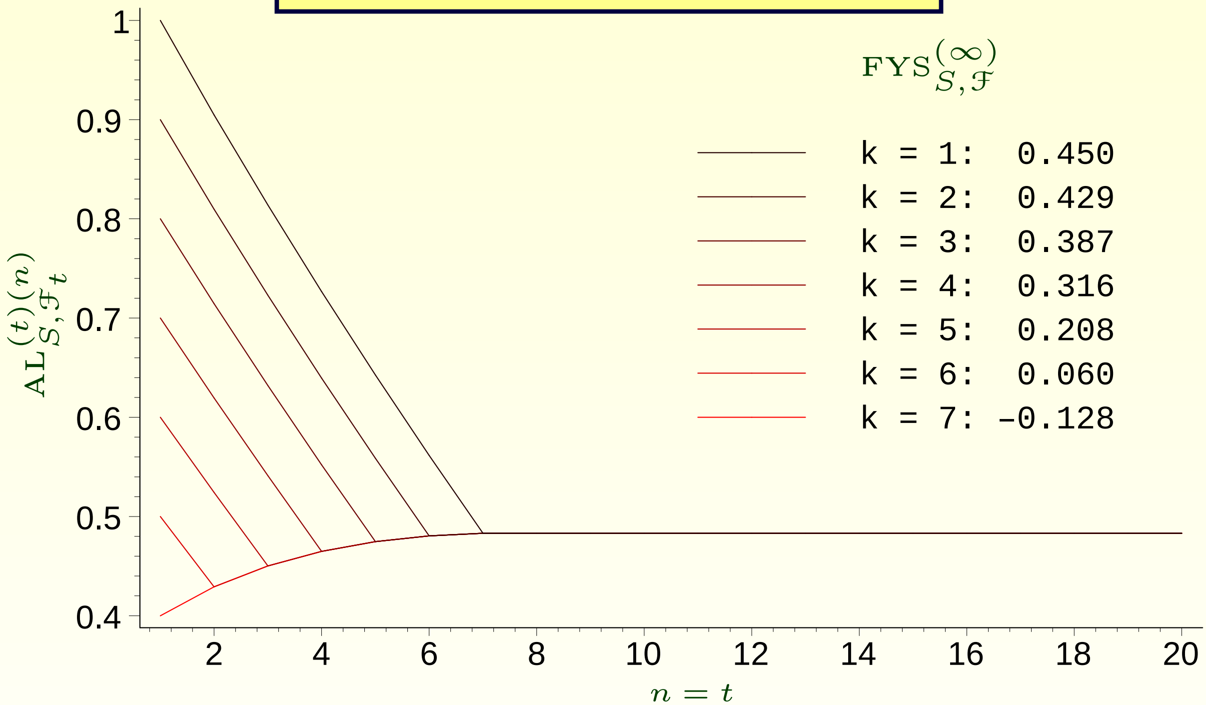
zde ale nezávislé na t, protože škála nezávisí na t

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

finanční rovnováha

$\mathrm{E}\, a_t(Z_{N_t}) = \mathrm{E}_\Theta\, X_{N_t}$

FYS podle k

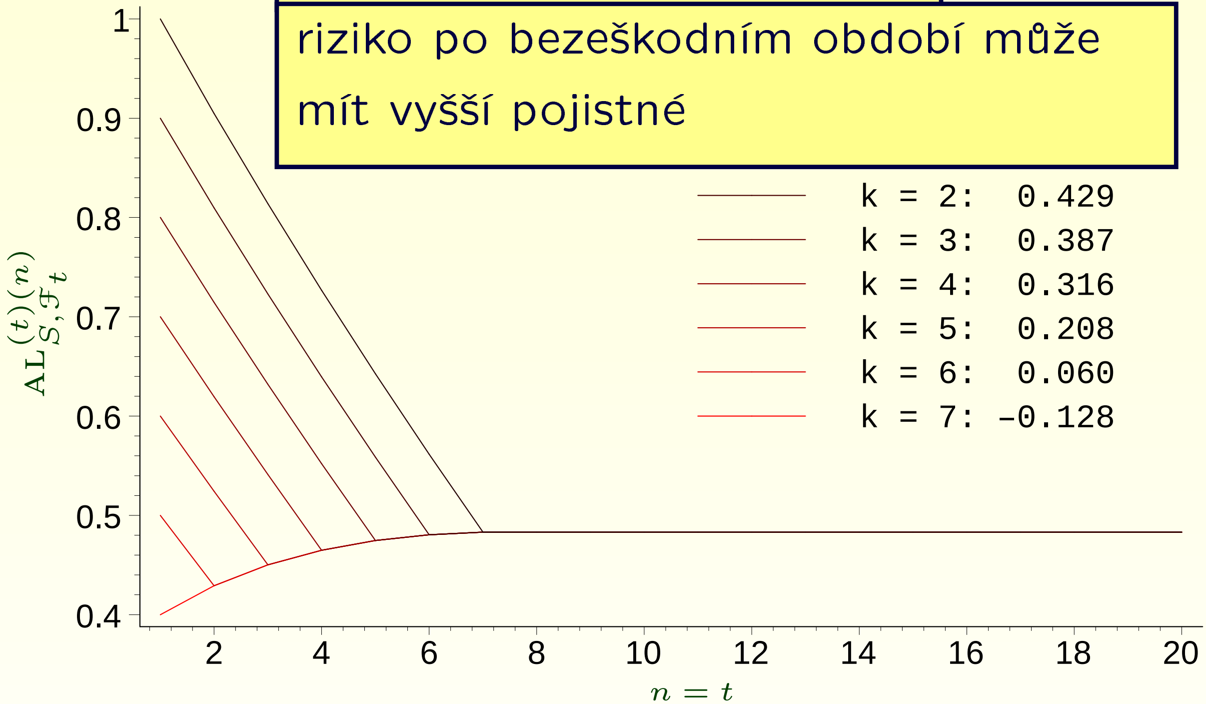


nutnost slevit velkému počtu rizik $\Rightarrow$ pokles AL $\Rightarrow$ pojistitel v zájmu fin. rov. zvyšuje pojistné $\Rightarrow$ bonus se „vypaří“ $\Rightarrow$ netransparentní

finanční rovnováha

$$\mathrm{E}\, a_t(Z_{N_t}) = \mathrm{E}_\Theta X_{N_t}$$

riziko po bezeškodním období může mít vyšší pojistné



nutnost slevit velkému počtu rizik $\Rightarrow$ pokles AL $\Rightarrow$ pojistitel v zájmu fin. rov. zvyšuje pojistné $\Rightarrow$ bonus se „vypaří“ $\Rightarrow$ netransparentní

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

finanční rovnováha

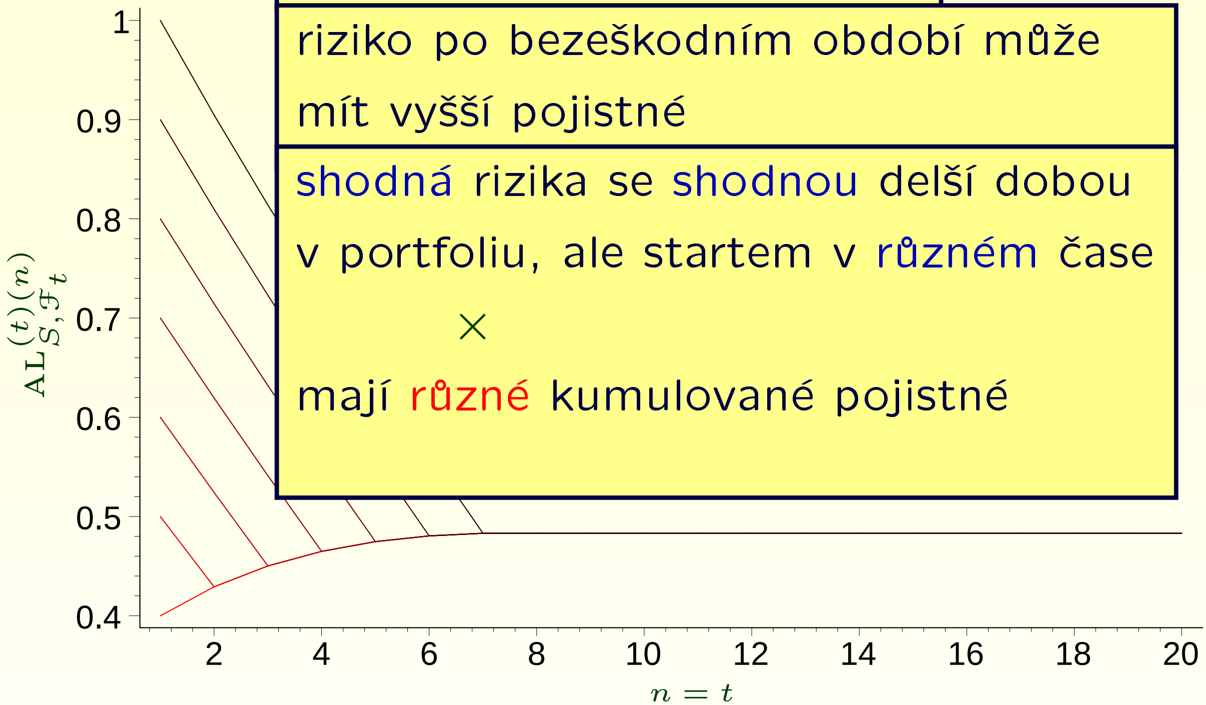
$$\mathrm{E}\, a_t(Z_{N_t}) = \mathrm{E}_\Theta X_{N_t}$$

riziko po bezeškodním období může mít vyšší pojistné

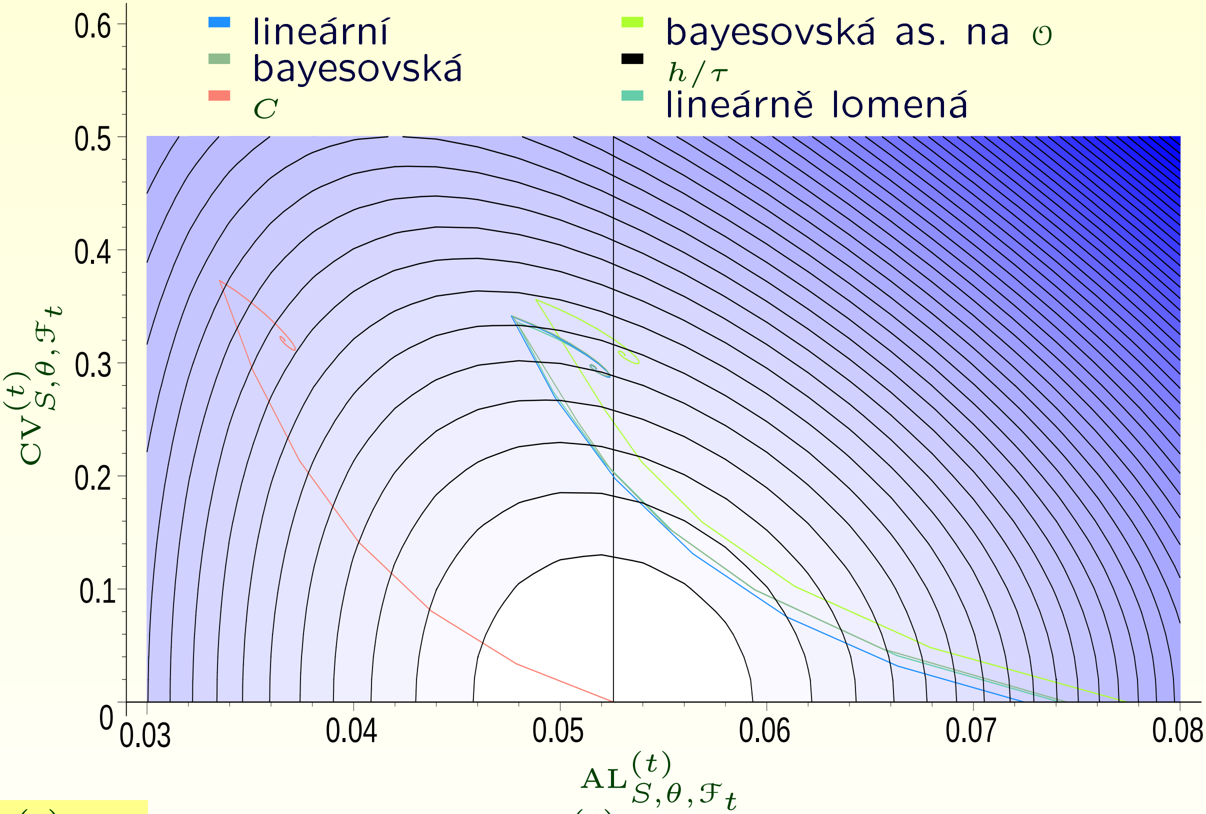
shodná rizika se shodnou delší dobou v portfoliu, ale startem v různém čase

$\times$

mají různé kumulované pojistné



nutnost slevit velkému počtu rizik $\Rightarrow$ pokles AL $\Rightarrow$ pojistitel v zájmu fin. rov. zvyšuje pojistné $\Rightarrow$ bonus se „vypaří“ $\Rightarrow$ netransparentní



$$\boxed{Q^{(t)}_{S,\theta,\mathcal{F}_t}} = \theta^2 - 2a_t(k_t)\theta \mathrm{AL}^{(t)}_{S,\theta,\mathcal{F}_t} + \\ + \left(\mathrm{AL}^{(t)}_{S,\theta,\mathcal{F}_t} a_t(k_t)\right)^2 \left(\left(\boxed{\mathrm{CV}^{(t)}_{S,\theta,\mathcal{F}_t}}\right)^2 + 1\right)$$

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

minimalizace (Q resp. CV) $\equiv$ co nejpřesnější pojistné

- praxi nelze čekat na to, až se riziko stabilizuje v okolí nějakého stavu $\Rightarrow$ potřebujeme odchylky od začátku co nejmenší
- hrozí, že buď riziko odláká jiný pojistitel, který přesněji stanoví pojistné nebo pojistíme za neprofitabilní pojistné
- musíme se zabývat rychlostí konvergence

Celková variace sazbovací základny Z_n vůči základně $Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)}$ na portfoliu $\mathcal{F}$ je

$$\mathrm{TV}_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)}(n) = \sum_{j \in \mathcal{K}} \left| \mathrm{P}_\theta\left(Z_n = j\right) - \mathrm{P}_\theta\left(Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)} = j\right) \right|.$$

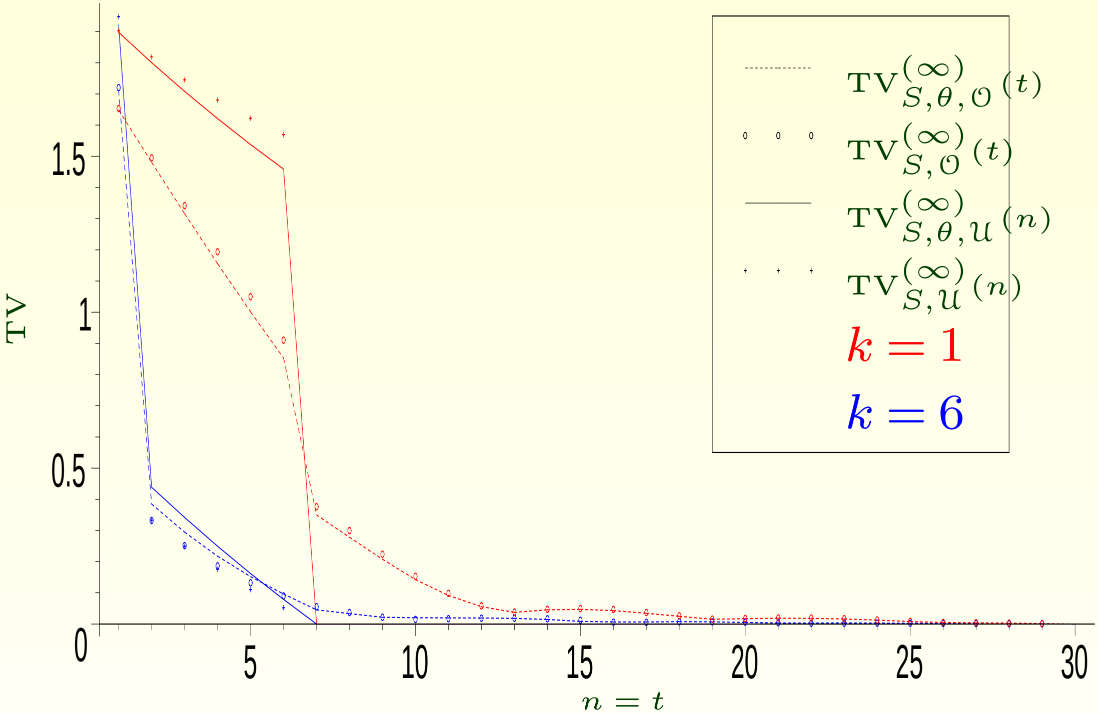
Míru konvergence potom spolu s Bonsdorf (1992) definujme následovně.

Mírou konvergence BMS S a rizika s parametrem $\Theta = \theta$ rozumíme takové $\mathrm{ROC}_{S,\theta}$, že

1. když $\rho > \mathrm{ROC}_{S,\theta}$, tak existuje $q < \infty$, že $\mathrm{TV}_{S,\theta,\mathcal{U}}^{(\infty)}(n) \leq \rho q^n$ pro všechna n a
2. když $\rho < \mathrm{ROC}_{S,\theta}$, tak takové q neexistuje.

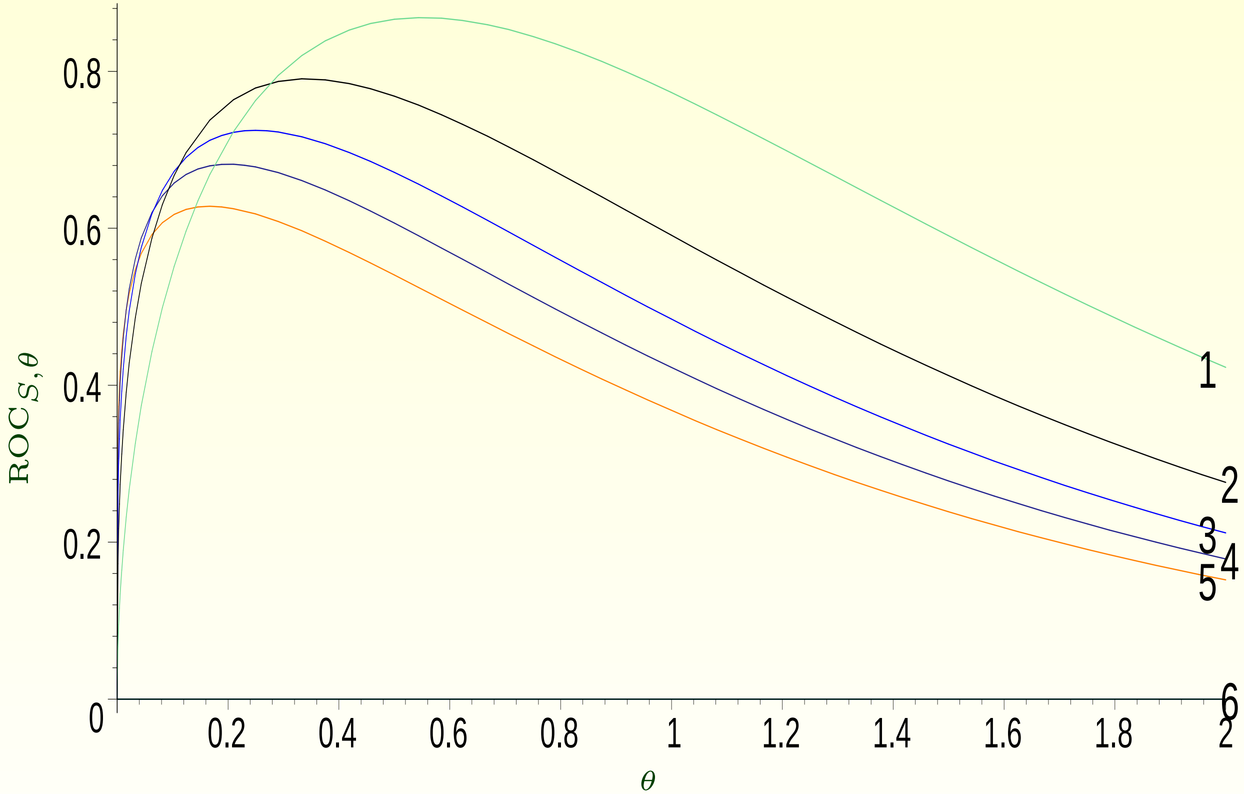
1. pro ind. rizika (a uzavřené portfolio) je důležitá rychlost konvergence posloupnosti $\{\mathrm{P}_\theta(Z_n = j)\}_{n=1}^{\infty}$
2. pro pojišťovnu je důležitá rychlost konvergence posloupnosti $\{w_n(t)\}_{t=1}^{\infty}$
3. pokud však optimalizujeme sazbovací funkci pomocí sazbovací základny Z_{N_Ω}, pak nemůžeme o konvergenci mluvit vůbec, máme totiž

$$\mathrm{TV}_{S,\theta,\mathcal{F}}(n) = \sum_{j \in \mathcal{K}} \left| \mathrm{P}_\theta(Z_n = j) - \mathrm{P}_\theta(Z_{N_\Omega} = j) \right|$$



Opět vidíme, jak důležité jsou vlastnosti BMS v prvních letech a jako u AL vidíme, že $k = 6$ má lepší vlastnosti.

definice BMS
vlastnosti BMS
hlad po bonusu
optimalizace BMS



Porovnání pravidel BMS, čísla u čar znamenají počet stupňů jako sankce za jednu škodu.

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

- závislost změny pojistného na změně rizikovosti (ŠF)
- během $V \in \mathbb{N}_0$ období za $n, n+1, \ldots, n+V$ resp. $t, t+1, \ldots, t+V$
- β značí diskontní faktor
- $\mathcal{X}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) = \sum_{v=0}^{V} X_{n+v} \beta^{(t+v-1)+1/2}$

  je diskontovaný úhrn škod ($\mathcal{X}_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} = X$)
- $\mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) = \sum_{v=0}^{V} a_{t+v}(Z_{n+v}) \beta^{t+v-1}$

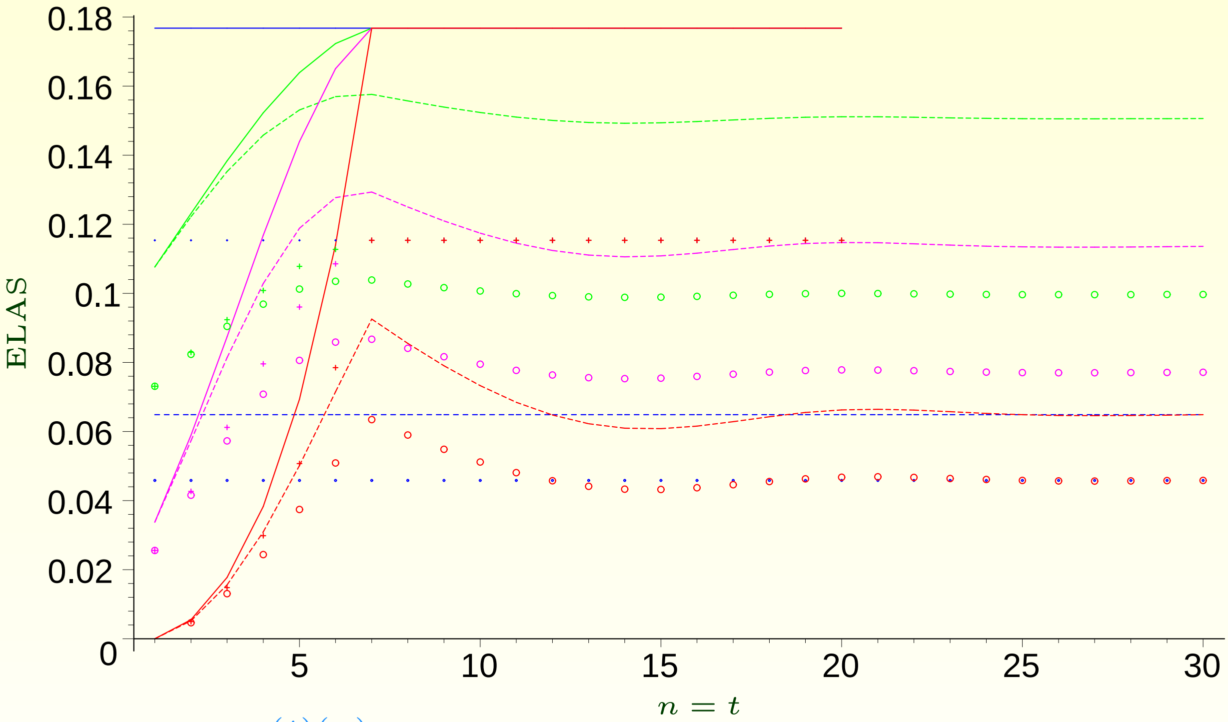
  je disk. úhrn pojistného ($\mathcal{A}_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} = a(Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)})$)

definice BMS
vlastnosti BMS
hlad po bonusu
optimalizace BMS

$$\mathrm{ELAS}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) = \frac{\dfrac{d\,\mathrm{E}_\theta\,\mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)}{\mathrm{E}_\theta\,\mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)}}{\dfrac{d\,\mathrm{E}_\theta\,\mathcal{X}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)}{\mathrm{E}_\theta\,\mathcal{X}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)}}$$

- za ... ri ...
- b ... $, n+V$ re ...
- β značí diskontní faktor
- $$\mathcal{X}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) = \sum_{v=0}^{V} X_{n+v}\beta^{(t+v-1)+1/2}$$
  je diskontovaný úhrn škod ($\mathcal{X}_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} = X$)
- $$\mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V) = \sum_{v=0}^{V} a_{t+v}(Z_{n+v})\beta^{t+v-1}$$
  je disk. úhrn pojistného ($\mathcal{A}_{S,\theta,\mathcal{F}}^{(\infty)} = a(Z_{\mathcal{F}}^{(\infty)})$)

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS



$\mathrm{ELAS}^{(t)(n)}_{S,\theta}(V)$

$\mathrm{ELAS}^{(t)(n)}_{S,\mathcal{F}_t}(V)$

$\mathrm{ELAS}^{(t)}_{S,\theta,\mathcal{F}_t}(V)$

$\mathrm{ELAS}^{(t)}_{S}(V)$

$\mathrm{ELAS}^{(\infty)}_{S,\theta,\mathcal{O}}$

$\mathrm{ELAS}^{(\infty)}_{S,\mathcal{O}}$

$\mathrm{ELAS}^{(\infty)}_{S,\theta,\mathcal{U}}$

$\mathrm{ELAS}^{(\infty)}_{S,\mathcal{U}}$

$V = 0$

$V = 5$

$V = 15$

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

Přestávka

agenda

- definice
  - definice modelu škod
  - definice modelu portfolia
  - definice BMS
- vlastnosti BMS
  - AL,FYS, rovnováha
  - CV,Q
  - ROC,TV
  - ELAS
- hlad po bonusu a spoluúčast
- optimální BMS
  - optimalizace pravidel
  - optimalizace sazbovací funkce
  - optimalizace pravidel i funkce BMS zároveň
  - optimalizace elasticity

hlad po bonusu a spoluúčast

$n-1$

$\boxed{j}$

(škoda)

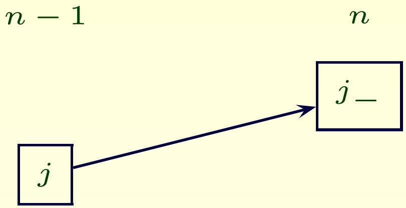
hlad po bonusu a spoluúčast

$n-1$ n

$\boxed{j}$

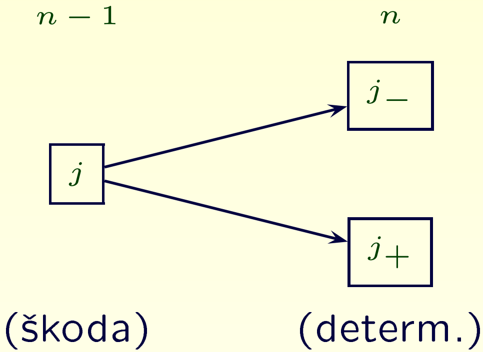
(škoda) (determ.)

hlad po bonusu a spoluúčast

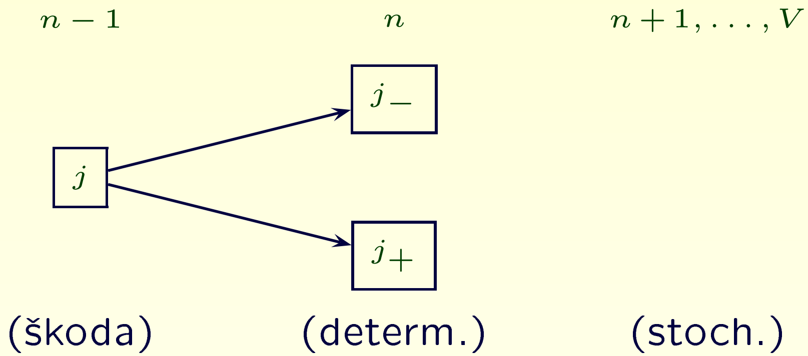


(škoda) (determ.)

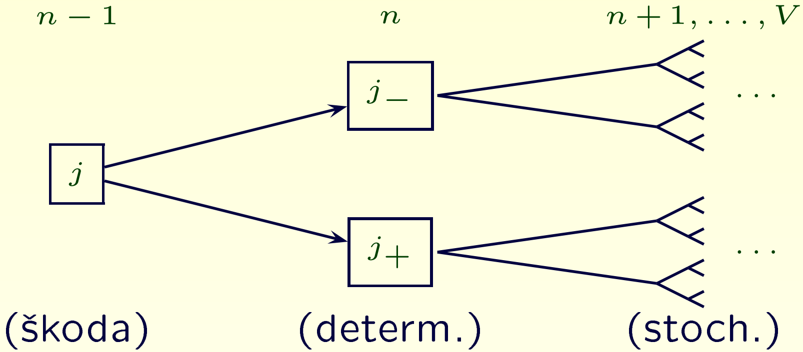
hlad po bonusu a spoluúčast



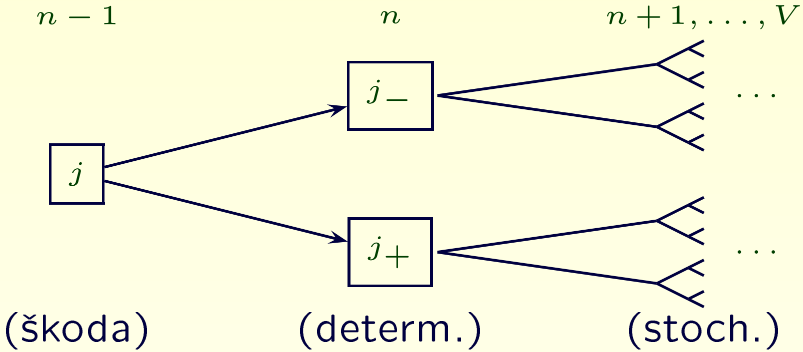
hlad po bonusu a spoluúčast



hlad po bonusu a spoluúčast



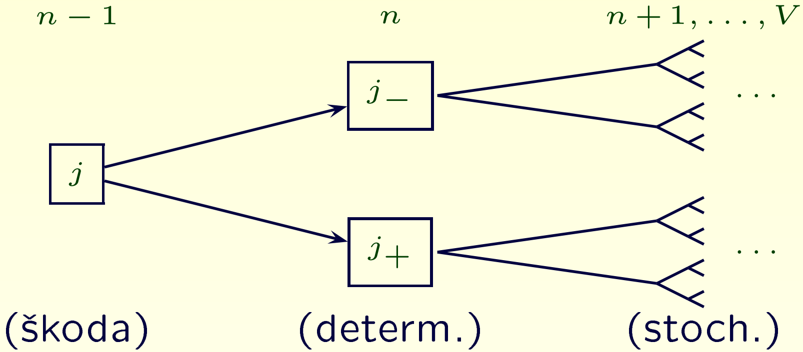
hlad po bonusu a spoluúčast



$$\mathcal{A}^{(t)(n)}_{S,\theta}(V)\Big|_j = \mathrm{E}_\theta \sum_{v=0}^{V} a_{t+v}(Z_{n+v}|Z_n = j)\beta^v$$

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

hlad po bonusu a spoluúčast



$$\mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)\Big|_j = \mathrm{E}_\theta \sum_{v=0}^{V} a_{t+v}(Z_{n+v}|Z_n=j)\beta^v$$

Optimální retence rizika θ v čase n resp. t ve stavu j s výhledem na $V \in \mathbb{N}$ období

$$\mathrm{RET}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)\Big|_j = \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)\Big|_{j_-} - \mathcal{A}_{S,\theta}^{(t)(n)}(V)\Big|_{j_+}$$

- **hladem po bonusu** je $(s_1, s_2, \dots)$
- nahlášené škody K_n $(0 \le K_n \le M_n)$
- prst., že škoda přes y, je $\overline{G}(y) = 1 - G(y)$
- pro dané $M_n = m$ má $K_n \sim \mathrm{Bi}\left(m, \overline{G}(s_n)\right)$ bez ohledu na hodnotu Θ

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,[K_n | M_n = m] &= \overline{G}(s_n) m, \\
\mathrm{E}\, K_n &= \overline{G}(s_n)\, \mathrm{E}\, M_n \quad \text{a} \\
\mathrm{E}_\Theta\, K_n &= \overline{G}(s_n)\, \mathrm{E}_\Theta\, M_n.
\end{aligned}
$$

- Když $M_n | \Theta = \theta \sim \mathrm{Po}\,(\theta)$, potom je rozdělení $K_n | \Theta = \theta \sim \mathrm{Po}\left(\theta \overline{G}(s_n)\right)$. A pokud navíc $\Theta \sim \Gamma\,(h, \tau)$, je $\Theta \overline{G}(s_n) \sim \Gamma\left(h, \tau / \overline{G}(s_n)\right)$

definice BMS
vlastnosti BMS
hlad po bonusu
optimalizace BMS

Příklad pro $K = 3$, $\mathcal{B} = 1$, $\mathcal{M} = 2$ a $Y_{nj} \sim \mathrm{Exp}(1)$:

$$\begin{pmatrix} 1-e^{-\theta} & e^{-\theta} & 0 \\ 1-e^{-\theta} & 0 & e^{-\theta} \\ 1-e^{-\theta} & 0 & e^{-\theta} \end{pmatrix}$$

definice BMS
vlastnosti BMS
hlad po bonusu
optimalizace BMS

Příklad pro $K = 3$, $\mathcal{B} = 1$, $\mathcal{M} = 2$ a $Y_{nj} \sim \mathrm{Exp}(1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 - e^{-\theta\, e^{-s_n}} & e^{-\theta\, e^{-s_n}} & 0 \\ 1 - e^{-\theta\, e^{-s_n}} & 0 & e^{-\theta\, e^{-s_n}} \\ 1 - e^{-\theta\, e^{-s_n}} & 0 & e^{-\theta\, e^{-s_n}} \end{pmatrix}$$

definice BMS
vlastnosti BMS
hlad po bonusu
optimalizace BMS

Příklad pro $K=3$, $\mathcal{B}=1$, $\mathcal{M}=2$ a $Y_{nj}\sim \mathrm{Exp}(1)$:

$$\begin{pmatrix} 1-e^{-\theta\, e^{-s_n}} & e^{-\theta\, e^{-s_n}} & 0 \\ 1-e^{-\theta\, e^{-s_n}} & 0 & e^{-\theta\, e^{-s_n}} \\ 1-e^{-\theta\, e^{-s_n}} & 0 & e^{-\theta\, e^{-s_n}} \end{pmatrix}$$

máme návrh BMS

(i)

(ii)

(iii)

definice BMS
vlastnosti BMS
hlad po bonusu
optimalizace BMS

Příklad pro $K = 3$, $\mathcal{B} = 1$, $\mathcal{M} = 2$ a $Y_{nj} \sim \mathrm{Exp}(1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 - e^{-\theta\ e^{-s_n}} & e^{-\theta\ e^{-s_n}} & 0 \\ 1 - e^{-\theta\ e^{-s_n}} & 0 & e^{-\theta\ e^{-s_n}} \\ 1 - e^{-\theta\ e^{-s_n}} & 0 & e^{-\theta\ e^{-s_n}} \end{pmatrix}$$

máme návrh BMS

(i) spočteme optimální retenci

(ii)

(iii)

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

Příklad pro $K = 3$, $\mathcal{B} = 1$, $\mathcal{M} = 2$ a $Y_{nj} \sim \mathrm{Exp}(1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 - e^{-\theta\, e^{-s_n}} & e^{-\theta\, e^{-s_n}} & 0 \\ 1 - e^{-\theta\, e^{-s_n}} & 0 & e^{-\theta\, e^{-s_n}} \\ 1 - e^{-\theta\, e^{-s_n}} & 0 & e^{-\theta\, e^{-s_n}} \end{pmatrix}$$

máme návrh BMS

(i) spočteme optimální retenci

(ii) retence nám dá změněnou škodní frekvenci

(iii)

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

Příklad pro $K=3$, $\mathcal{B}=1$, $\mathcal{M}=2$ a $Y_{nj}\sim \mathrm{Exp}(1)$:

$$\begin{pmatrix} 1-e^{-\theta\, e^{-s_n}} & e^{-\theta\, e^{-s_n}} & 0 \\ 1-e^{-\theta\, e^{-s_n}} & 0 & e^{-\theta\, e^{-s_n}} \\ 1-e^{-\theta\, e^{-s_n}} & 0 & e^{-\theta\, e^{-s_n}} \end{pmatrix}$$

máme návrh BMS

(i) spočteme optimální retenci

(ii) retence nám dá změněnou škodní frekvenci

(iii) znovu napočteme škálu BMS

Příklad pro $K = 3$, $\mathcal{B} = 1$, $\mathcal{M} = 2$ a $Y_{nj} \sim \mathrm{Exp}(1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 - e^{-\theta\, e^{-s_n}} & e^{-\theta\, e^{-s_n}} & 0 \\ 1 - e^{-\theta\, e^{-s_n}} & 0 & e^{-\theta\, e^{-s_n}} \\ 1 - e^{-\theta\, e^{-s_n}} & 0 & e^{-\theta\, e^{-s_n}} \end{pmatrix}$$

máme návrh BMS

(i) spočteme optimální retenci

(ii) retence nám dá změněnou škodní frekvenci

(iii) znovu napočteme škálu BMS

a pokračujeme prvním bodem

definice BMS
vlastnosti BMS
hlad po bonusu
optimalizace BMS

Příklad pro $K=3$, $\mathcal{B}=1$, $\mathcal{M}=2$ a $Y_{nj}\sim \mathrm{Exp}(1)$:

$$\begin{pmatrix} 1-e^{-\theta\, e^{-s_n}} & e^{-\theta\, e^{-s_n}} & 0 \\ 1-e^{-\theta\, e^{-s_n}} & 0 & e^{-\theta\, e^{-s_n}} \\ 1-e^{-\theta\, e^{-s_n}} & 0 & e^{-\theta\, e^{-s_n}} \end{pmatrix}$$

máme návrh BMS

(i) spočteme optimální retenci

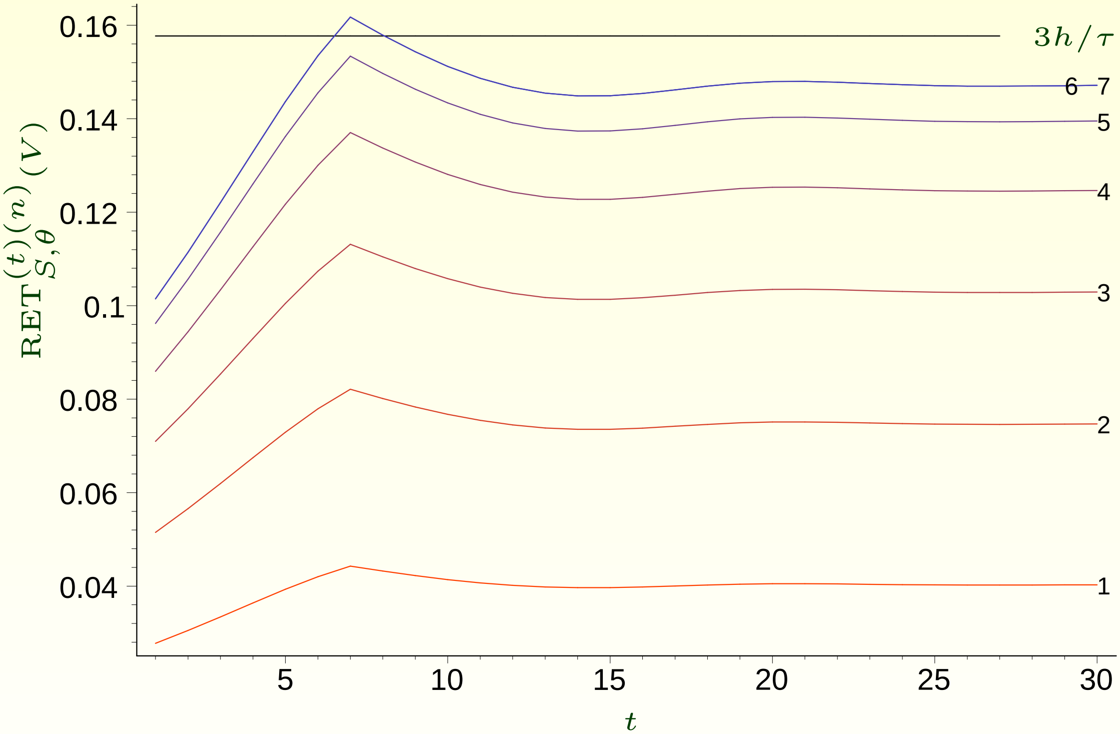
(ii) retence nám dá změněnou škodní frekvenci

(iii) znovu napočteme škálu BMS

a pokračujeme prvním bodem

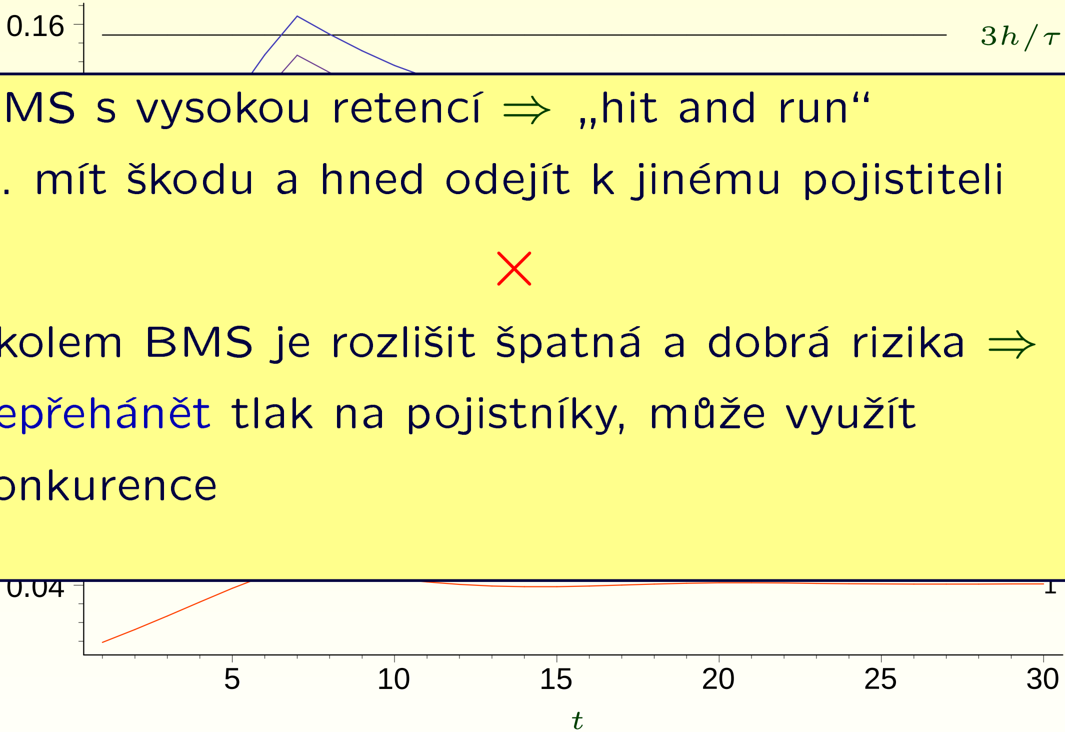
znalost $(s_1, s_2, \ldots)$?
zveřejnění hodnot = „návodná“ spoluúčast
Lemaire (1995): v Německu zveřejňování ze zákona

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS



čísla u křivek: počet stupňů za škodu

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS



BMS s vysokou retencí $\Rightarrow$ „hit and run“

tj. mít škodu a hned odejít k jinému pojistiteli

×

úkolem BMS je rozlišit špatná a dobrá rizika $\Rightarrow$

nepřehánět tlak na pojistníky, může využít konkurence

čísla u křivek: počet stupňů za škodu

agenda

- definice
  - definice modelu škod
  - definice modelu portfolia
  - definice BMS
- vlastnosti BMS
  - AL,FYS, rovnováha
  - CV,Q
  - ROC,TV
  - ELAS
- hlad po bonusu a spoluúčast
- optimální BMS
  - optimalizace pravidel
  - optimalizace sazbovací funkce
  - optimalizace pravidel i funkce BMS zároveň
  - optimalizace elasticity

1) optimalizace pravidel pomocí TV a $\mathrm{ROC}_{S,\theta}$ — na sazbovací funkci nezávislé

2) optimalizace sazbovací funkce při dané sazbovací základně (tj. i pravidlech)

   (i) Z_{N_t} — nehodí se, neboť $a_t(j)/a_t(k_t)$ nestabilní

   (ii) Z_{N_Ω} — váženým průměrem přes období stáří systému

   (iii) $Z_{\mathfrak{F}}^{(\infty)}$ pro uzavřené nebo otevřené portfolio

3) optimalizace pravidel i škály BMS zároveň

4) optimalizace elasticity

Strategie: najít rychle konvergující BMS

- „přežít" co nejméně přechodných období
- asymptotická sazbovací základna

Měření rychlosti:

A/ $\mathrm{ROC}_{S,\theta}$ — asymptotické hodnocení rychlosti, bez ohledu na starovací stupeň k

B/ doba do přiblížení se limitě (pokles $\mathrm{TV}^{(\infty)}_{S,\theta,\mathcal{F}}(n)$ pod určitou úroveň) — praktické, zohlední k

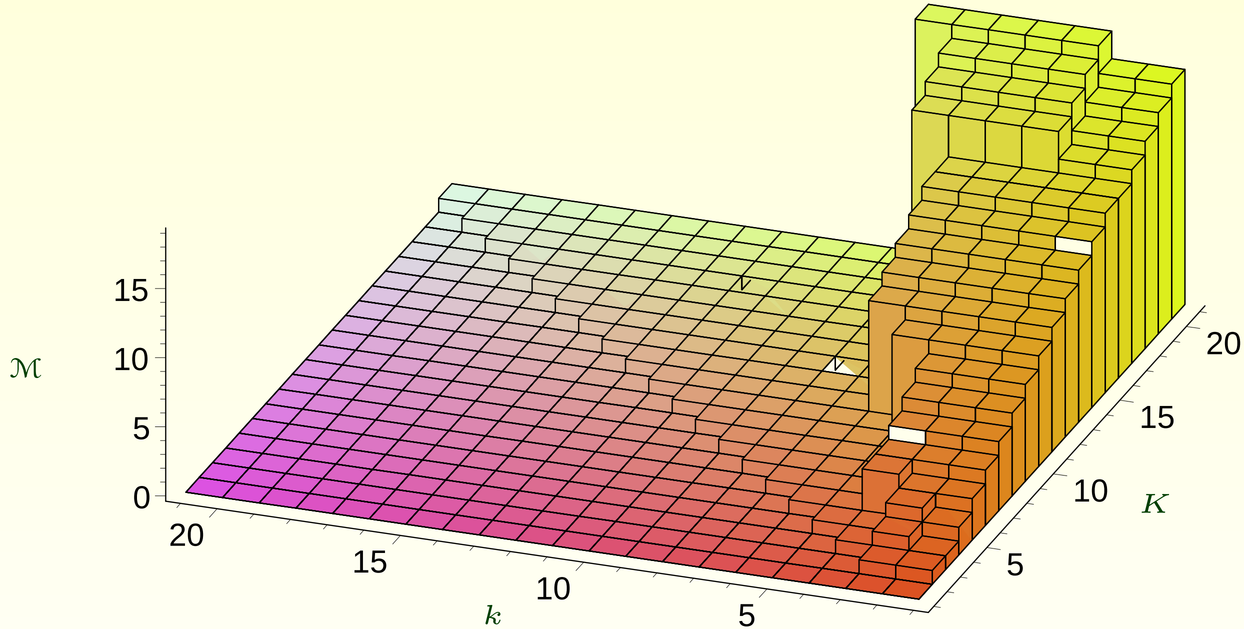
C/ rychlost Z_n pro $n \to \infty$ implikuje rychlost Z_{N_t} pro $t \to \infty$ (rychlost $w_n(t)$ pro $t \to \infty$ lze těžko ovlivnit) $\Rightarrow$ uzavřené portfolio a ukazatele $\mathrm{TV}^{(\infty)}_{S,\theta,\mathcal{U}}(n)$ a $\mathrm{ROC}_{S,\theta}$

Hodnocení (problémy v praktickém nasazení):

- až na $\mathcal{M} = K - 1$ máme nejrychlejší konvergenci (ROC), když je $k = K$
- pro $\mathcal{M} = K - 1$ je pak nejlepší volbou $k = 2$
- Většina rizik je dobrých a škodu mít nebude $\Rightarrow$ menší chyba, když
  - u všech rizik předpoklad, že jsou dobrá (start v K)
  - ta co se ukážou jako špatná, přirážka v budoucích obdobích
- rozpor mezi teorií a praxí
- vynutitelnost malusu vs. bonusová turistika

definice BMS
vlastnosti BMS
hlad po bonusu
optimalizace BMS

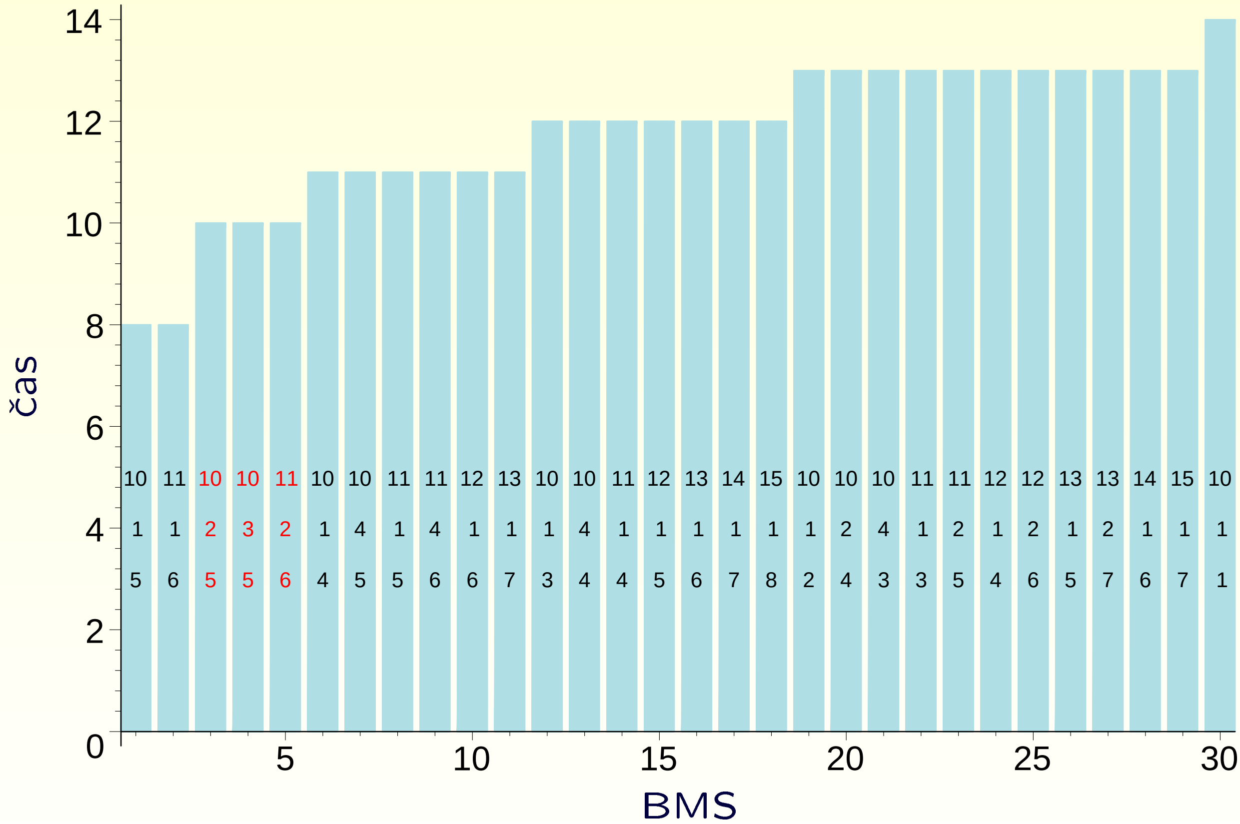
Volba nejlepších $\mathcal{M}$ pro všechny kombinace K a k



Resumé: při velkém k volíme $\mathcal{M} = 1$
a při malém k volíme velké $\mathcal{M}$

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

další omezení $K = 10, \ldots, 15$, $\mathcal{M} = 1, \ldots, 4$ a $k \leq \left\lceil \frac{K}{2} \right\rceil$



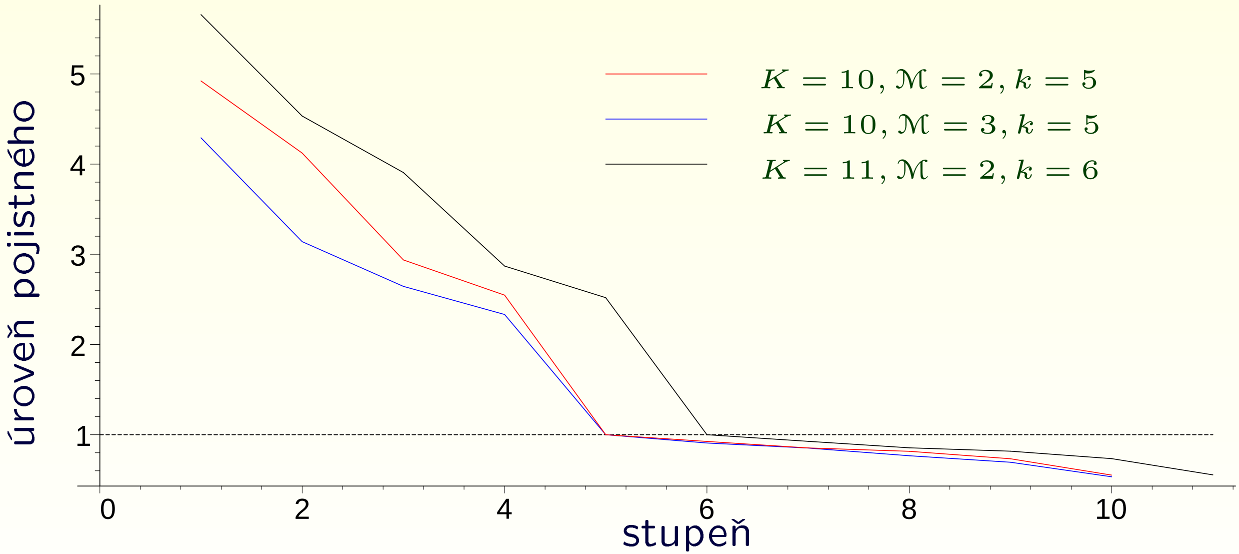
☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

Princip: minimalizace Norbergova rizika

$$\text{např. } Q^{(t)}_{S,\mathcal{F}_t} = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}_\Theta X_{N_t} - a_t(Z_{N_t})\right]^2$$

Bez omezení a_t: bayesovská sazbovací funkce

$$\boxed{\mathrm{bay}_{\mathcal{F}}(j) = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}_\Theta X_{N_\Omega} | Z_{N_\Omega} = j\right]}$$



omezení na tvar sazbovací funkce a_t

(i) lineární $a_t(j) = a + bj$

(ii) lineárně lomená (lépe po částech lineární)

$$a_n(j) = \begin{cases} (k-j)a + b, & j \le k \\ (k-j)c + b, & j > k. \end{cases}$$

omezení na tvar sazbovací funkce a_t

(i) lineární $a_t(j) = a + bj$

(ii) lineárně lomená (lépe po částech lineární)

$$a_n(j) = \begin{cases} (k-j)a + b, & j \leq k \\ (k-j)c + b, & j > k. \end{cases}$$

(iii) exponenciální $a_n(j) = \exp(a + bj)$

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

omezení na tvar sazbovací funkce a_t

(i) lineární $a_t(j) = a + bj$

(ii) lineárně lomená (lépe po částech lineární)

$$a_n(j) = \begin{cases} (k-j)a + b, & j \leq k \\ (k-j)c + b, & j > k. \end{cases}$$

ad (i) lineární sazbovací funkce:

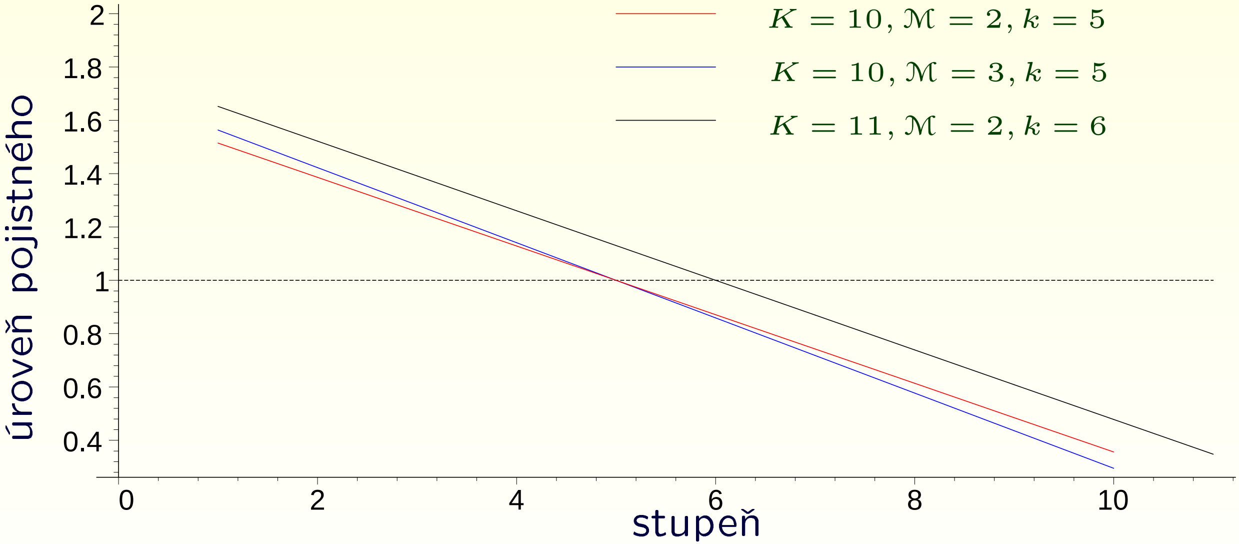
$$\begin{aligned}
\mathrm{lin}^{(n)}(j) &= \mathrm{E}\,\mathrm{E}_\Theta X_n + \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{E}_\Theta X_n, Z_n)}{\mathrm{var}\, Z_n}(j - \mathrm{E}\, Z_n) \\
\mathrm{lin}^{(t)}_{\mathcal{F}_t}(j) &= \mathrm{E}\,\mathrm{E}_\Theta X_{N_t} + \frac{\mathrm{cov}\left(\mathrm{E}_\Theta X_{N_t}, Z_{N_t}\right)}{\mathrm{var}\, Z_{N_t}}(j - \mathrm{E}\, Z_{N_t}) \\
\mathrm{lin}_{\mathcal{F}}(j) &= \mathrm{E}\,\mathrm{E}_\Theta X_{N_\Omega} + \frac{\mathrm{cov}\left(\mathrm{E}_\Theta X_{N_\Omega}, Z_{N_\Omega}\right)}{\mathrm{var}\, Z_{N_\Omega}}(j - \mathrm{E}\, Z_{N_\Omega}) \\
\mathrm{lin}^{(\infty)}_{\mathcal{F}}(j) &= \mathrm{E}\,\mathrm{E}_\Theta X + \frac{\mathrm{cov}\left(\mathrm{E}_\Theta X, Z^{(\infty)}_{\mathcal{F}}\right)}{\mathrm{var}\, Z^{(\infty)}_{\mathcal{F}}}(j - \mathrm{E}\, Z^{(\infty)}_{\mathcal{F}})
\end{aligned}$$

omezení na tvar sazbovací funkce a_t

(i) lineární $a_t(j) = a + bj$

(ii) lineárně lomená (lépe po částech lineární)

$$a_n(j) = \begin{cases} (k-j)a + b, & j \le k \\ (k-j)c + b, & j > k. \end{cases}$$

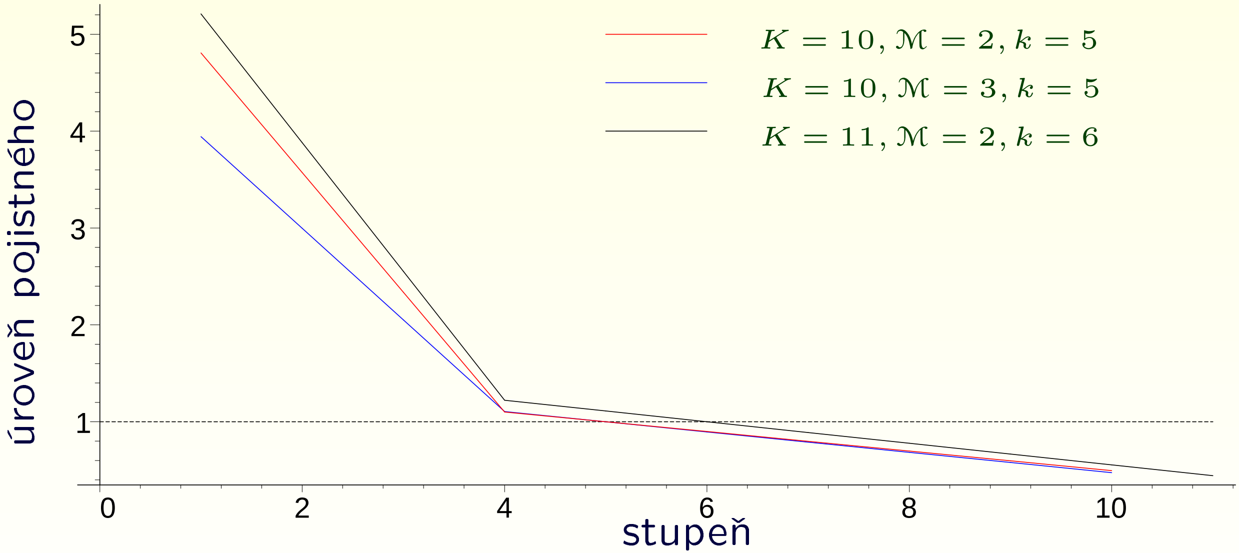


omezení na tvar sazbovací funkce a_t

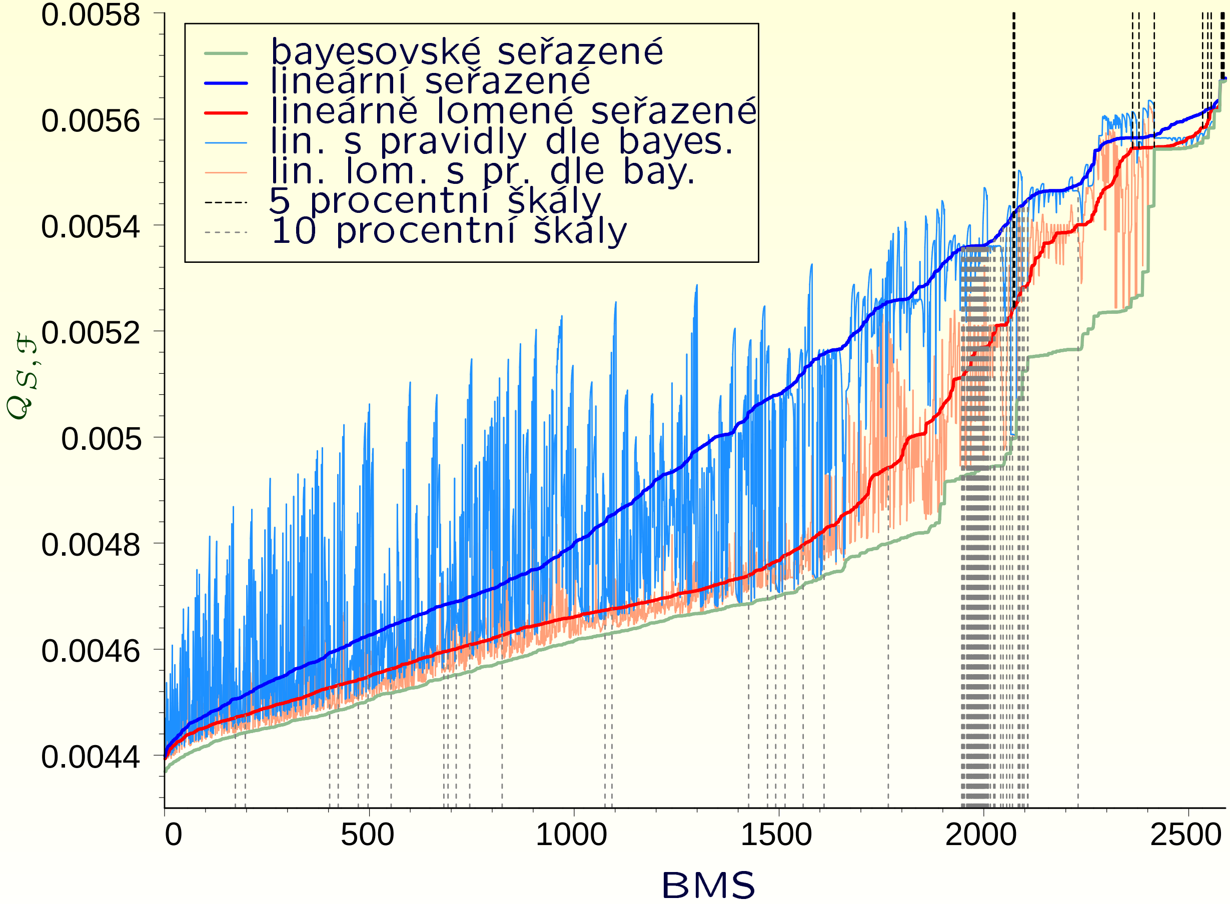
(i) lineární $a_t(j) = a + bj$

(ii) lineárně lomená (lépe po částech lineární)

$$a_n(j) = \begin{cases} (k-j)a + b, & j \le k \\ (k-j)c + b, & j > k. \end{cases}$$

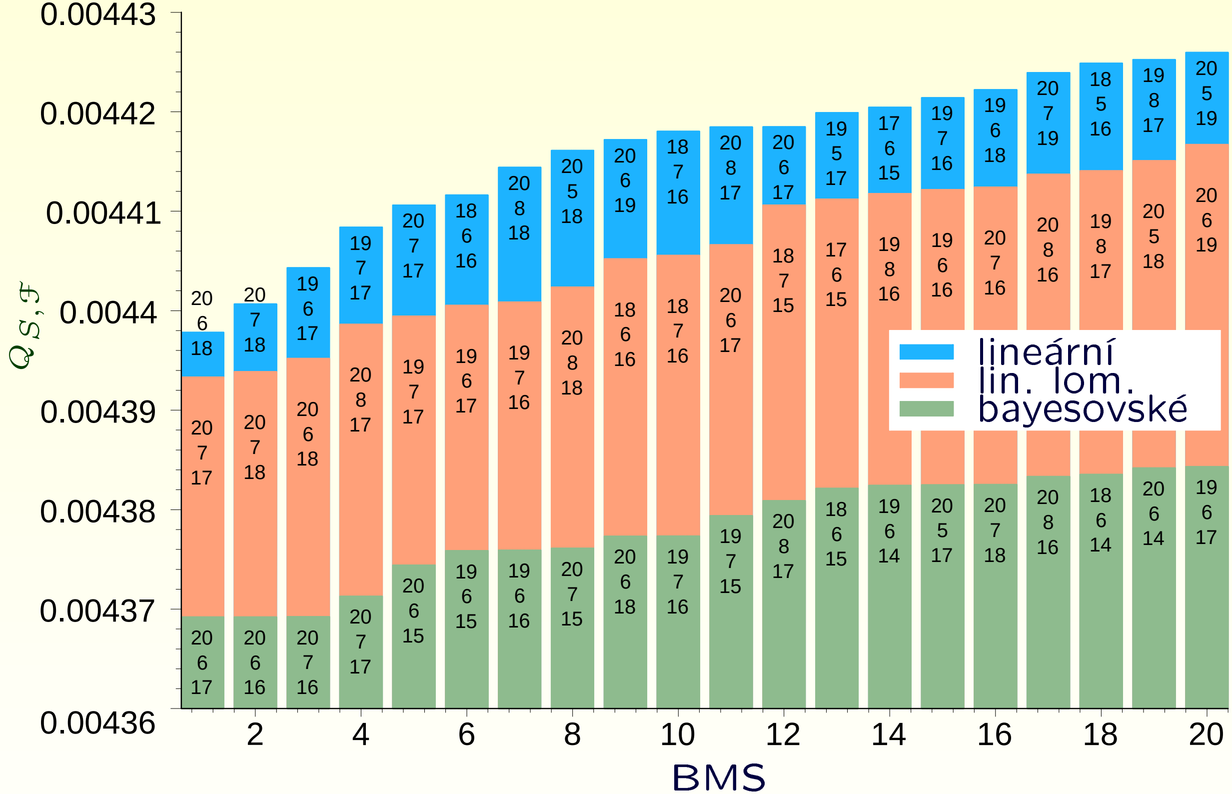


☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

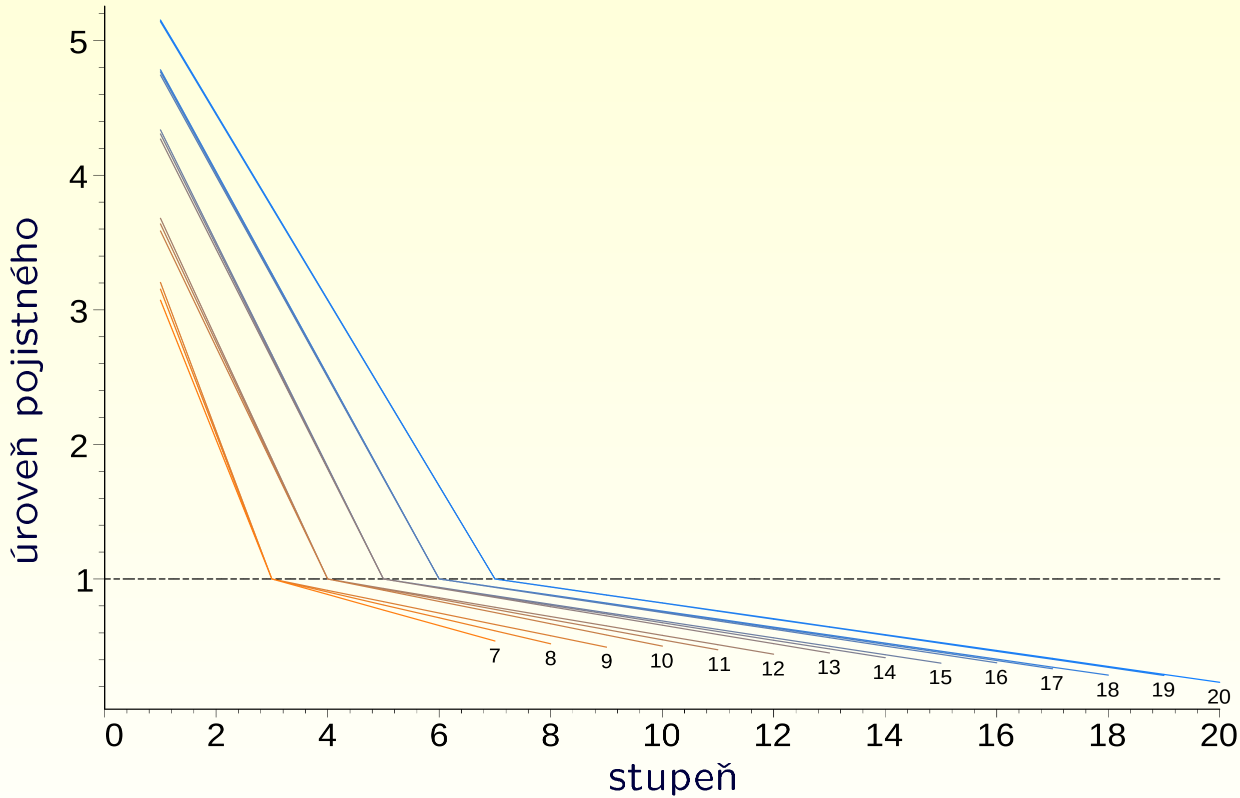


☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

20 nejlepších BMS pro každý tvar sazbovací funkce

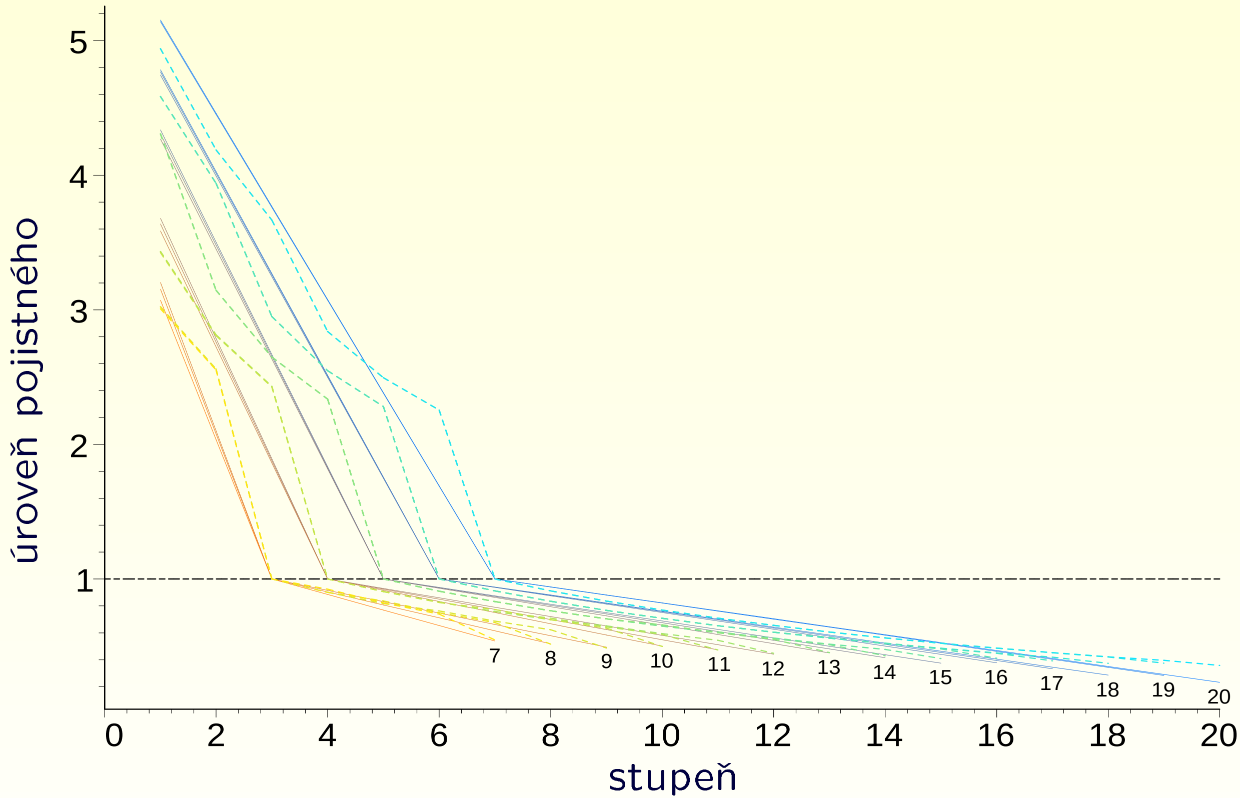


zřejmé: čím více stupňů tím lepší aproximace modelu počtu škod



Lineárně lomené škály pro $K = 7, \ldots, 20$, $\mathcal{M} = 3$ a $k = \left\lceil \frac{K}{3} \right\rceil$

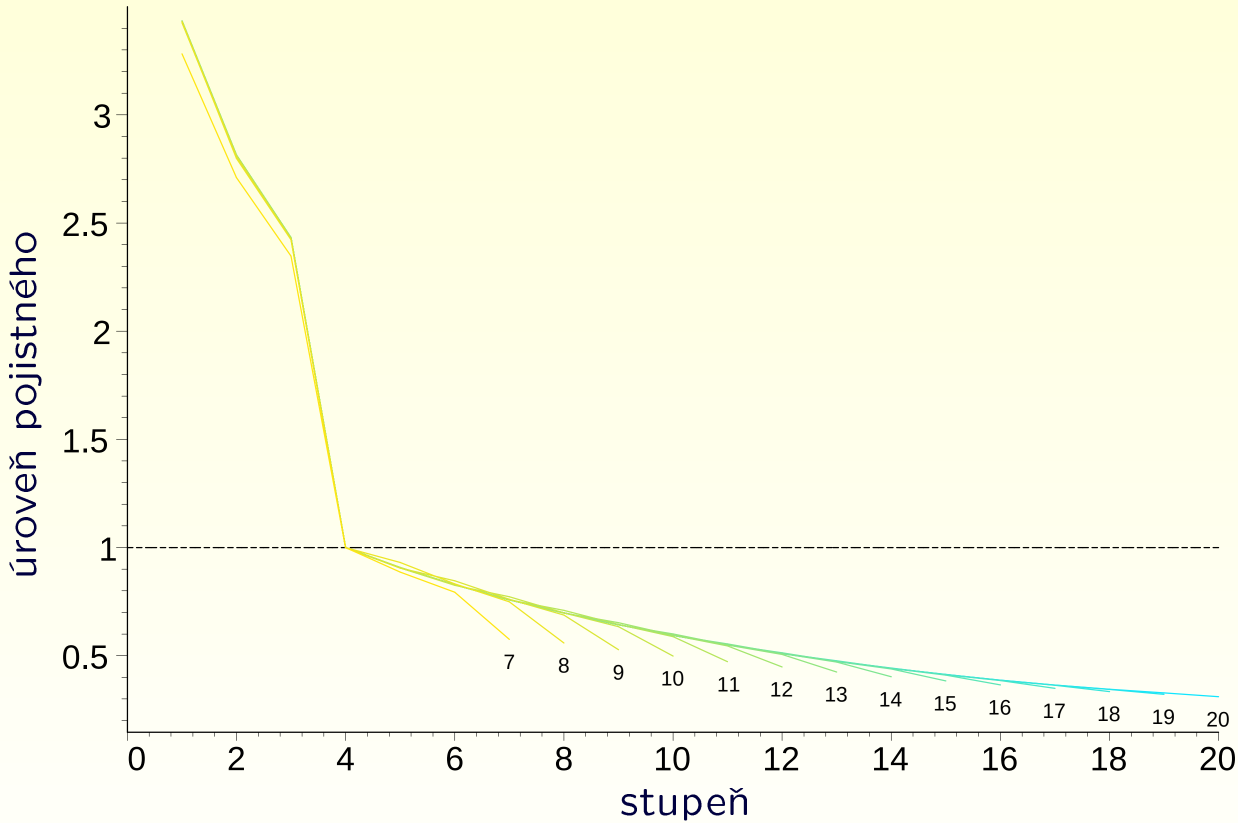
☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS



pro $K = 7, \ldots, 20$, $\mathcal{M} = 3$ a $k = \left\lceil \frac{K}{3} \right\rceil$

lin. lom. škála jako smysluplná aproximace bayesovské

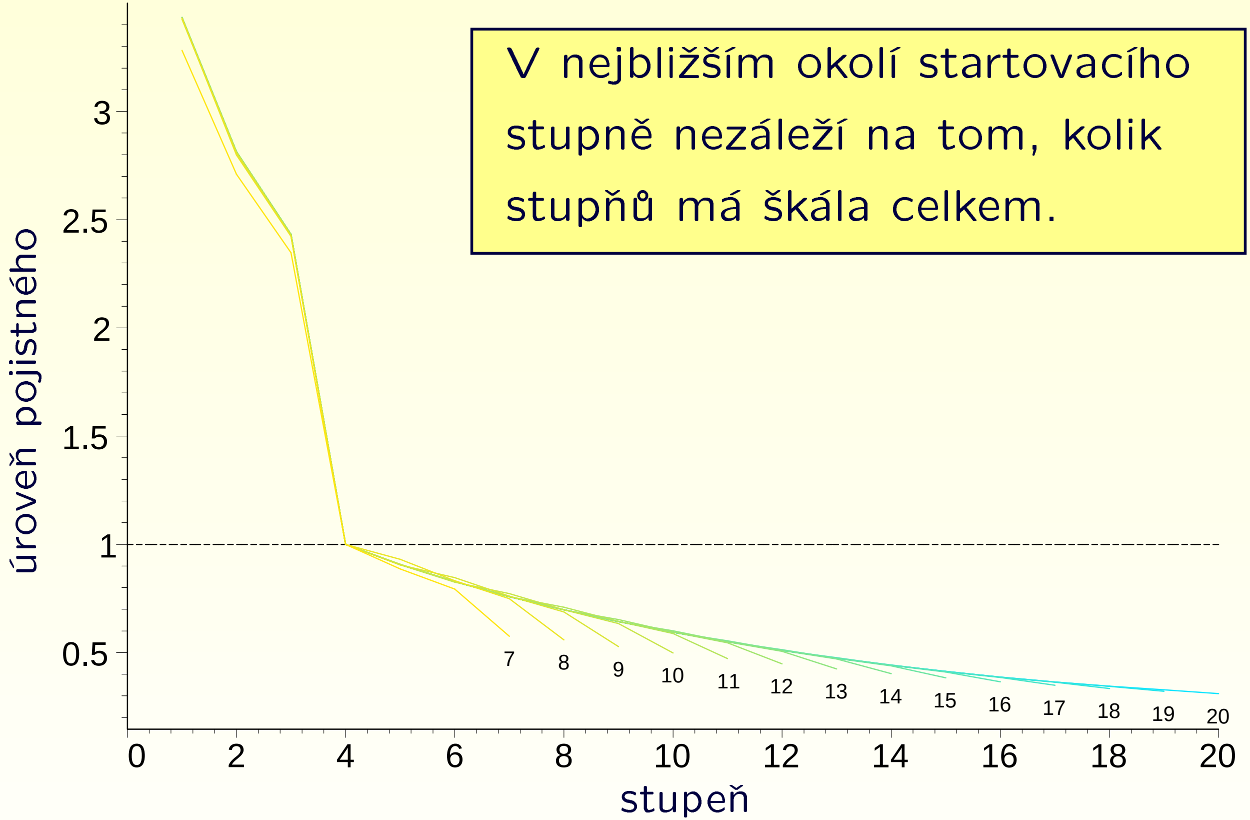
☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS



přerovnání škál (pro $K = 7, \ldots, 20$, $\mathcal{M} = 3$ a $k = \left\lceil \frac{K}{3} \right\rceil$)

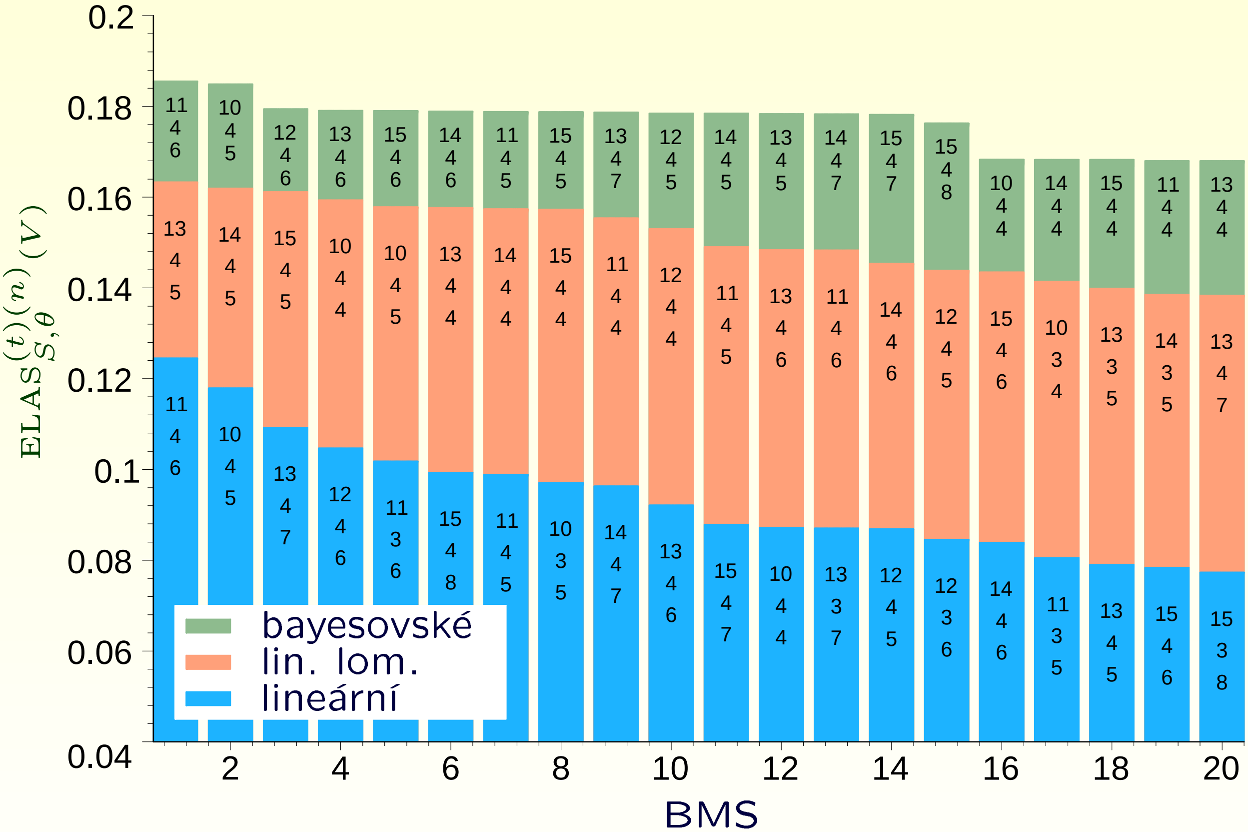
☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

V nejbližším okolí startovacího stupně nezáleží na tom, kolik stupňů má škála celkem.



přerovnání škál (pro $K = 7, \ldots, 20$, $\mathcal{M} = 3$ a $k = \left\lceil \frac{K}{3} \right\rceil$)

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS



popisky v grafu v pořadí od shora $K, \mathcal{M}, k$ $(V = 5,\ n = t = 1,$ $\theta = h/\tau,\ K = 10, \ldots, 15,\ \mathcal{M} = 1, \ldots, 4$ a $k \leq \left\lceil \frac{K}{2} \right\rceil)$

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

Děkuji za pozornost!

Literatura

F. Baione, S. Levantesi, and M. Menzietti. The development of an optimal bonus-malus system in a competitive market. ASTIN Bulletin, 32(1):159–170, 2002.

L. Bermúdez, M. Denuit, and J. Dhaene. Exponential bonus-malus systems integrating a priori risk classification. Journal of Actuarial Practice, 9(1): 84–112, 2001.

H. Bonsdorf. On the convergence rate of bonus-malus systems. ASTIN Bulletin, 22(2):218–223, 1992.

G. Coene and L. G. Doray. A finantialy balanced bonus-malus system. ASTIN Bulletin, 26(1):107–116, 1996.

M. de Lourdes Centeno and J. Manuel Andrade e Silva. Bonus systems in an open portfolio. Insurance: Mathematics and Economics, 28(3):341–350, June 2001. available at http://ideas.repec.org/a/eee/insuma/v28y2001i3p341-350.html.

definice BMS
vlastnosti BMS
hlad po bonusu
optimalizace BMS

N. De Pril. The efficiency of a bonus-malus system. ASTIN Bulletin, 10.1:59–72, 1978.

N. De Pril. Optimal claim decisions for a bonus-malus system: A continuous approach. ASTIN Bulletin, 10.2: 215–222, 1979.

N. P. Dellaert, J. B. G. Frenk, and E. Voshol. Optimal claim behaviour for third—party liability insurances with perfect information. Insurance: Mathematics and Economics, 10:145–151, 1991.

J. Holtan. Bonus made easy. ASTIN Bulletin, 24:61–74, 1994.

J. Holtan. Optimal loss financing under bonus-malus contracts. 30th ASTIN Colloquium, Japan, 22–25 August 1999, 1999.

J. Lemaire. Si les assurés connaissaient la programmation dynamique. Bulletin de l'Association Royale des Actuaires Belges, 70:54–63, 1975.

J. Lemaire. Driver versus company—optimal behaviour of the policy holder. Scandinavian Actuarial Journal, 4:209–219, 1976.

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

J. Lemaire. How to define a bonus-malus system with an exponential utility function. ASTIN Bulletin, 10.3: 274–282, 1979.

J. Lemaire. Construction of the new belgian motor third. ASTIN Bulletin, 18.1:99–112, 1988.

J. Lemaire. Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance. Kluwer, 1995.

J. Lemaire and Z. Hongmin. A comparitive analysis of 30 bonus-malus systems. ASTIN Bulletin, 24.2:287–309, 1994a.

J. Lemaire and Z. Hongmin. High deductibles instead of bonus-malus: Can it work? ASTIN Bulletin, 24.1: 75–88, 1994b.

K. Loimaranta. Some asymptotic properties of bonus systems. ASTIN Bulletin, 6.3:233–245, 1972.

R. Norberg. Credibility premium plans which make allowance for bonus hunger. Scandinavian Actuarial Journal, 1975:73–86, 1975.

literatura

R. Norberg. A credibility theory for automobile bonus systems. Scandinavian Actuarial Journal, 1976: 92–107, 1976.

R. Norberg, J. M. Hoem, and f. Borgan. A nonasymptotic criterion for the evaluation of automobile bonus systems. Scandinavian Actuarial Journal, 1981:165–178, 1981.

S. Pitrebois, M. Denuit, and J.-F. Walhin. Setting a bonus-malus scale in the presence of other rating factors: Taylor's work revisited. ASTIN Bulletin, 33 (2):419–436, 2003a.

M. Shengwang, Y. Wei, and G. A. Whitmore. Accounting for individual over-dispersion in a bonus-malus automobile insurance system. ASTIN Bulletin, 29(2):327–337, 1999.

B. Sundt. Bonus hunger and credibility estimators with geometric weights. Insurance: Mathematics and Economics, 8:119–126, 1989.

B. Sundt and V. Gilde. On bonus system with credibility scales. Scandinavian Actuarial Journal, 1989:13–22, 1989.

☞ definice BMS
☞ vlastnosti BMS
☞ hlad po bonusu
☞ optimalizace BMS

P. Verico. Bonus-malus systems: "lack of transparency" and adequacy measure. ASTIN Bulletin, 32(2): 315–318, 2002.

J. Šváb. Srovnávání systémů bonus—malus. Seminář z aktuárských věd, 1999/2000:126–135, 2000.

J. Šváb. Hlad po bonusu. Seminář z aktuárských věd, 2001/2002:107–111, 2002a.

J. Šváb. Jak na systémy bonus—malus. Pojistné rozpravy, 12:101–132, 2002b.