

Analýza úmrtnosti

26.10.2012

Seminář z aktuárských věd

Petr Sotona

Kooperativa, pojišťovna, a.s., Vienna Insurance Group



Kooperativa

VIENNA INSURANCE GROUP

Pro život jaký je

Agenda

- ▶ **Úvod**
- ▶ Trend v úmrtnosti
- ▶ Modelování úmrtnosti v pojistném kmeni
- ▶ Modely úmrtnosti
 - ▶ Statistické metody
 - ▶ Lee Carter
 - ▶ Další modely s diskretním časem
 - ▶ Cairns Blake Dowd model
 - ▶ Projekce v LC a CBD
- ▶ Vyhlazování dat
- ▶ Projekce pomocí cílové tabulky
- ▶ Pravděpodobnost úmrtí ve vysokých věcích

Základní pojmy

- ▶ $D(t,x)$ počet zemřelých ve věku x v kalendářním roce t
- ▶ $E(t,x)$ počet žijících ve věku x v kalendářním roce t (expozice)
- ▶ $T_x(t)$ zbývající doba života jedince ve věku x v čase t
- ▶ Specifická míra úmrtnosti

$$m(t, x) = \frac{D(t, x)}{E(t, x)}$$

- ▶ Pravděpodobnost úmrtí v čase t $q(t, x) =$ pravděpodobnost, že se jedinec ve věku x v čase t nedožije věku $x+1$, tj.

$$q(t, x) = P(T_x(t) < 1)$$

- ▶ Vzájemný vztah

$$q(t, x) = 1 - \exp(-m(tx,))$$

Agenda

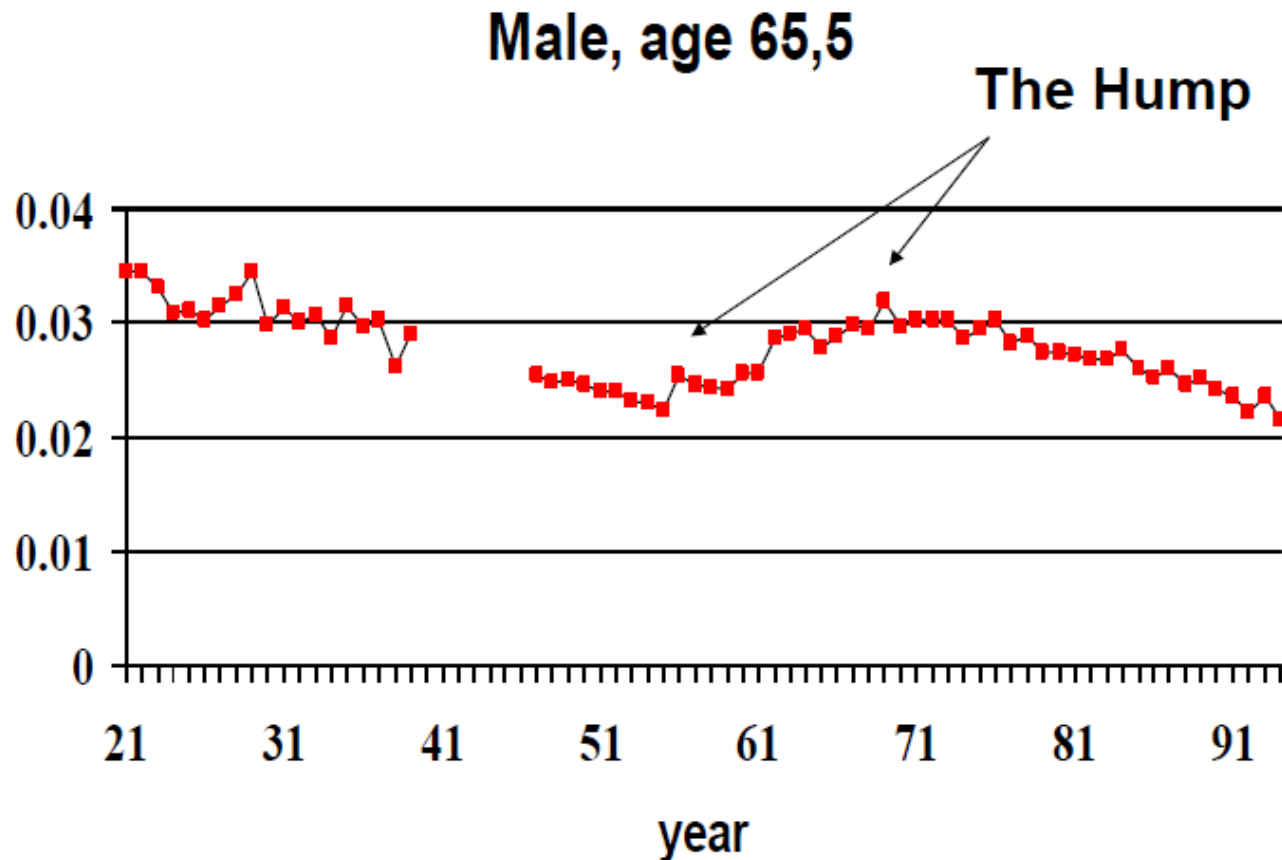
- ▶ Úvod
- ▶ **Trend v úmrtnosti**
- ▶ Modelování úmrtnosti v pojistném kmeni
- ▶ Modely úmrtnosti
 - ▶ Statistické metody
 - ▶ Lee Carter
 - ▶ Další modely s diskretním časem
 - ▶ Cairns Blake Dowd model
 - ▶ Projekce v LC a CBD
- ▶ Vyhlazování dat
- ▶ Projekce pomocí cílové tabulky
- ▶ Pravděpodobnost úmrtí ve vysokých věcích

Trend úmrtnosti

- ▶ Změny v pravděpodobnostech úmrtí v čase (vývoj v lékařství, životní prostředí – velký vliv kvality vody, životní styl, nové nemoci)
- ▶ Možné modelování:
 - ▶ Podle příčin úmrtí – problém, jak zachytit nové nemoci
 - ▶ Podle věkové struktury – dětská úmrtnost, nehodový hrb, konstantní část, stárnutí, vysoké věky
- ▶ Využití spíše populačních tabulek bez velkého vyhlazení
- ▶ Důležité srovnat výsledky s výsledky v okolních zemích
- ▶ Při nedostatku dat použít data z okolních zemí
- ▶ Hlídat smysluplnost výsledků, pochopit pozorování
- ▶ Příklad. Lokální maxima a minima v pravděpodobnostech úmrtí

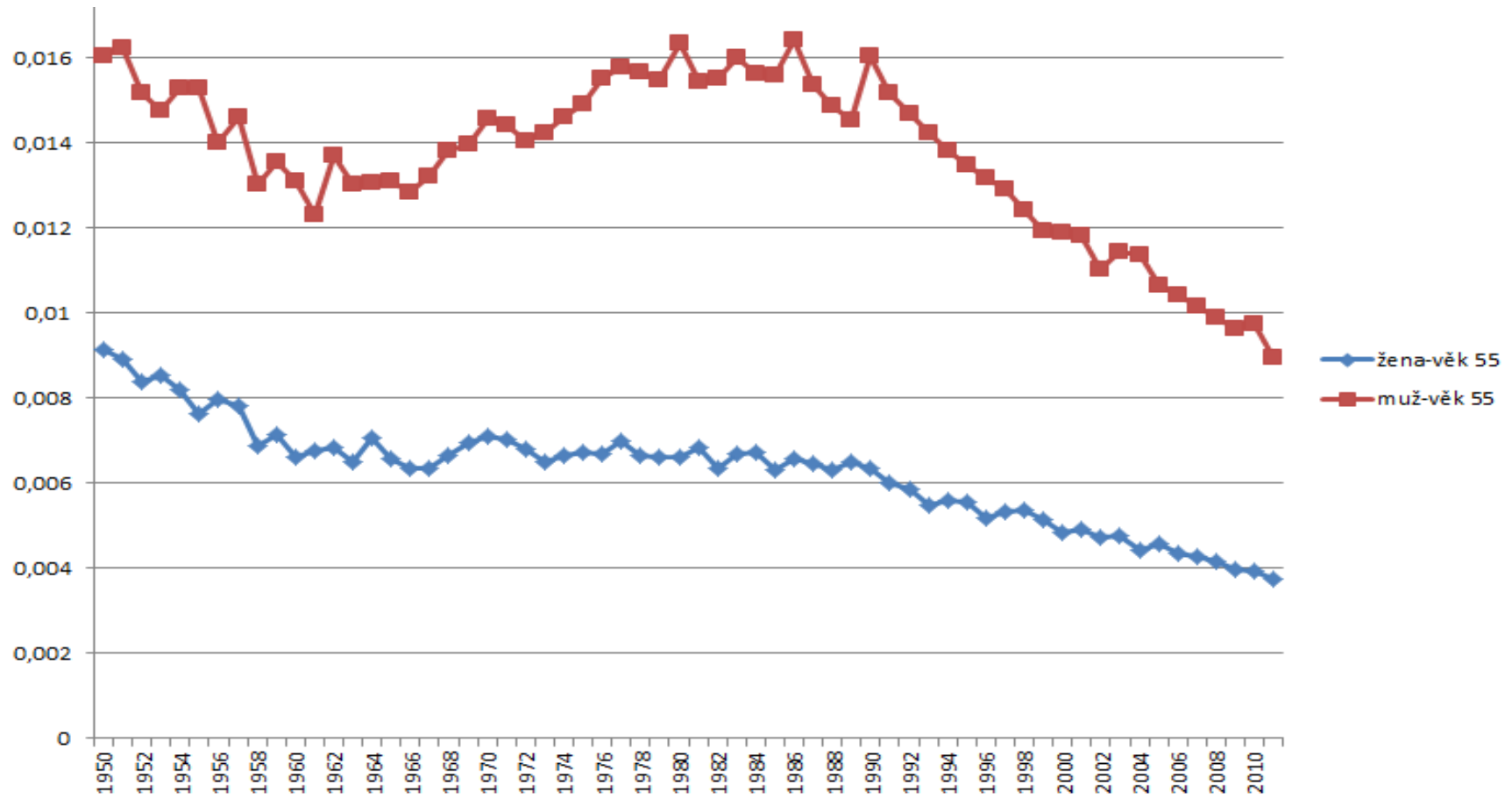
Trend úmrtnosti – ukázka 1

- ▶ v Nizozemí pouze muži věku 45-75 v letech 1951-1975 měli rostoucí trend v pravděpodobnostech úmrtí



Trend úmrtnosti – ukázka 1

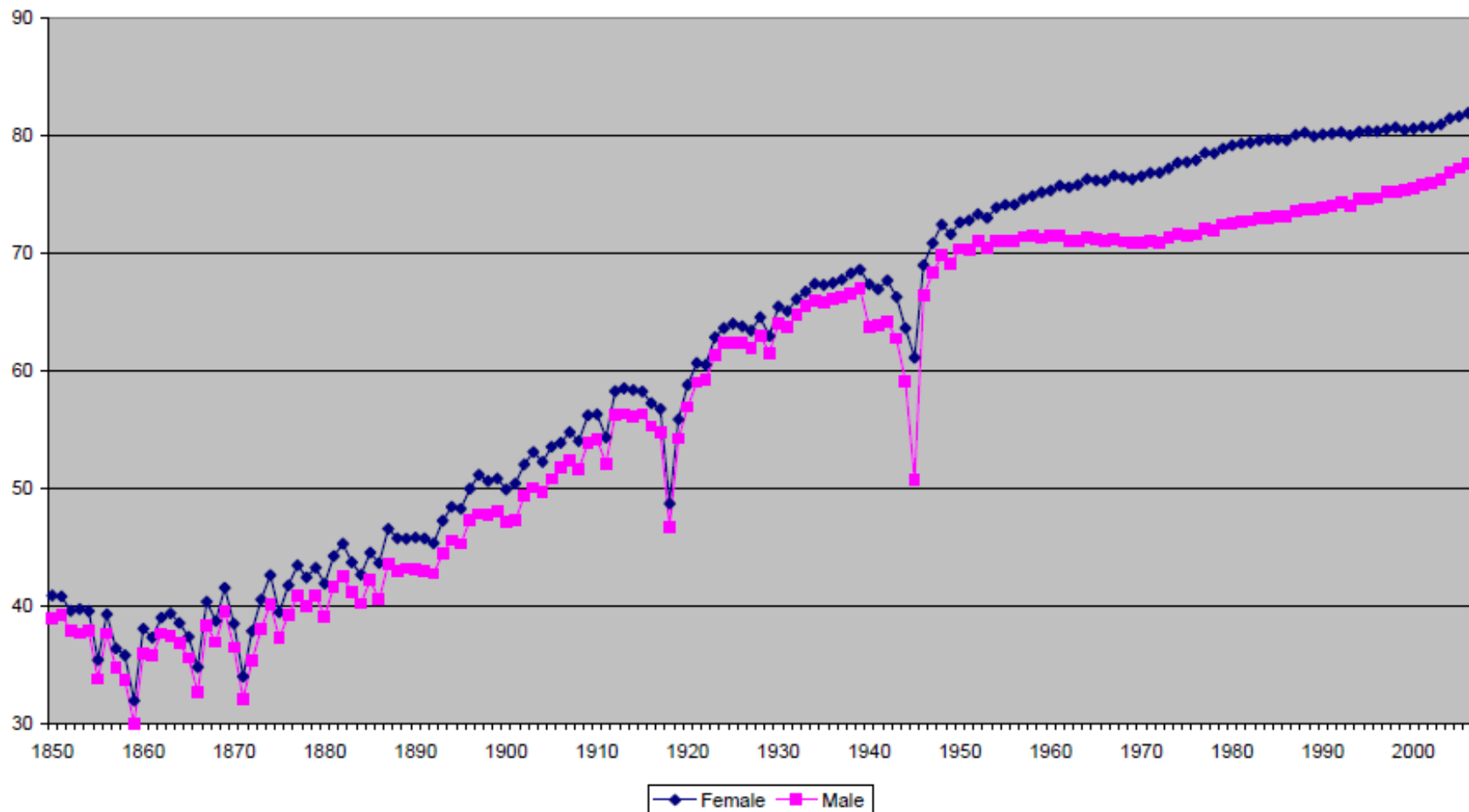
- ▶ u nás muži 45 – 75 od začátku 60. let do konce 80. let



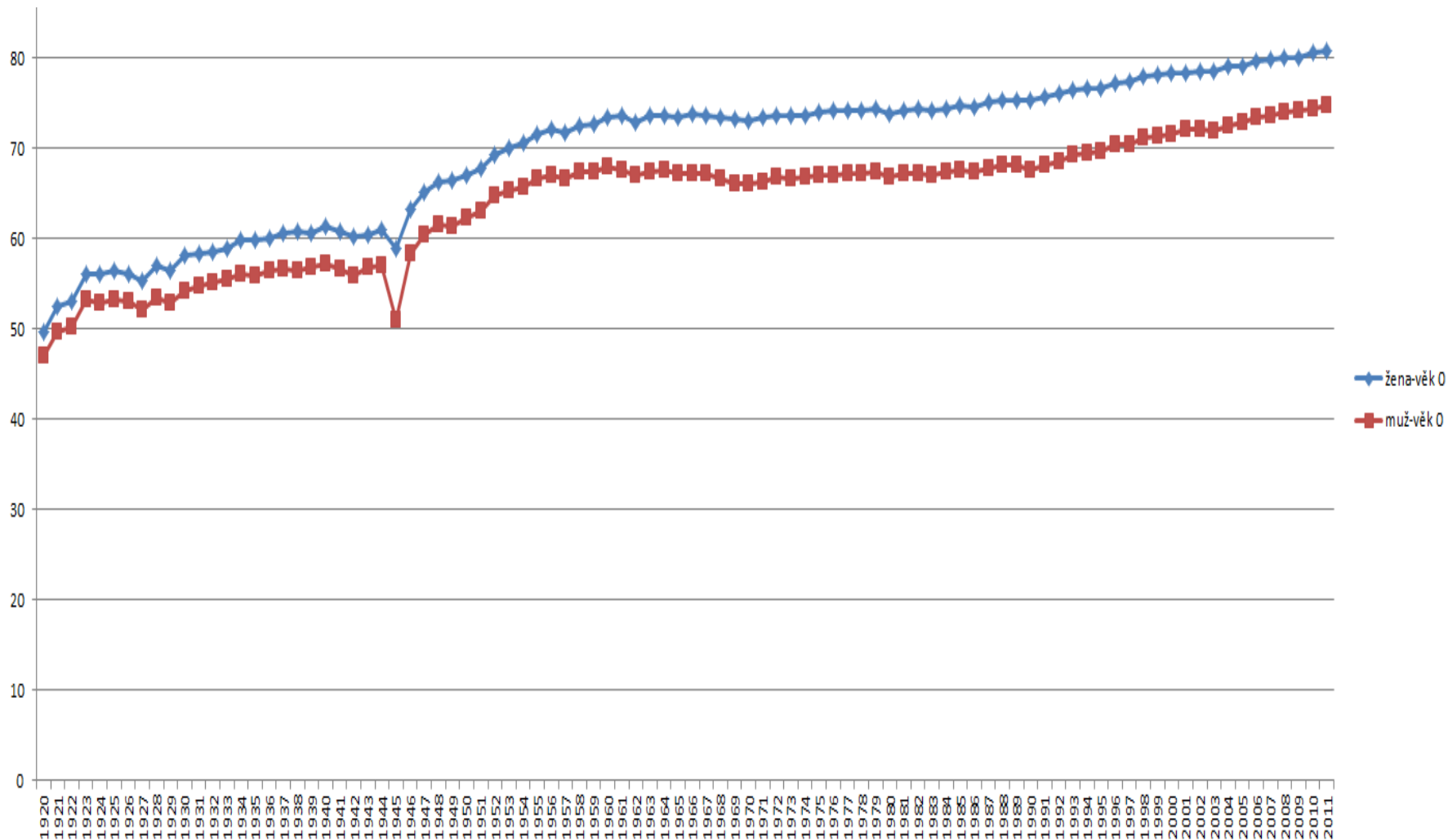
Trend úmrtnosti – ukázka 1

- ▶ Hlavní příčiny úmrtí:
 - ▶ (auto) nehody
 - ▶ Rakovina (plic)
 - ▶ Srdeční onemocnění
- ▶ Všechny příčiny smrti redukovány v 70.letech (u nás po roce 1989)
 - ▶ Výrazný posun v lékařství
 - ▶ Chování a změna životního stylu

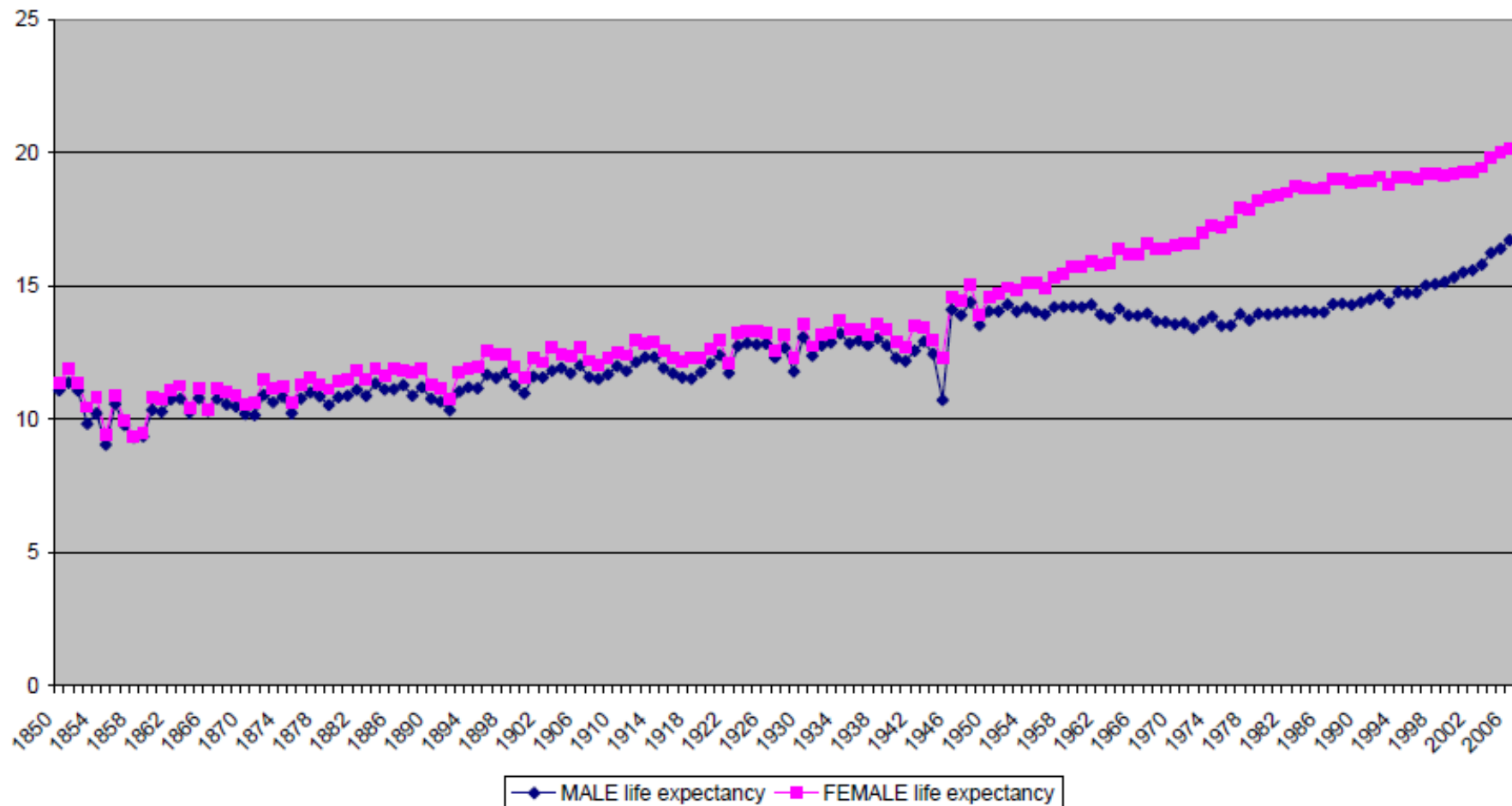
Ukázka 2 – Naděje dožití v NL (věk 0)



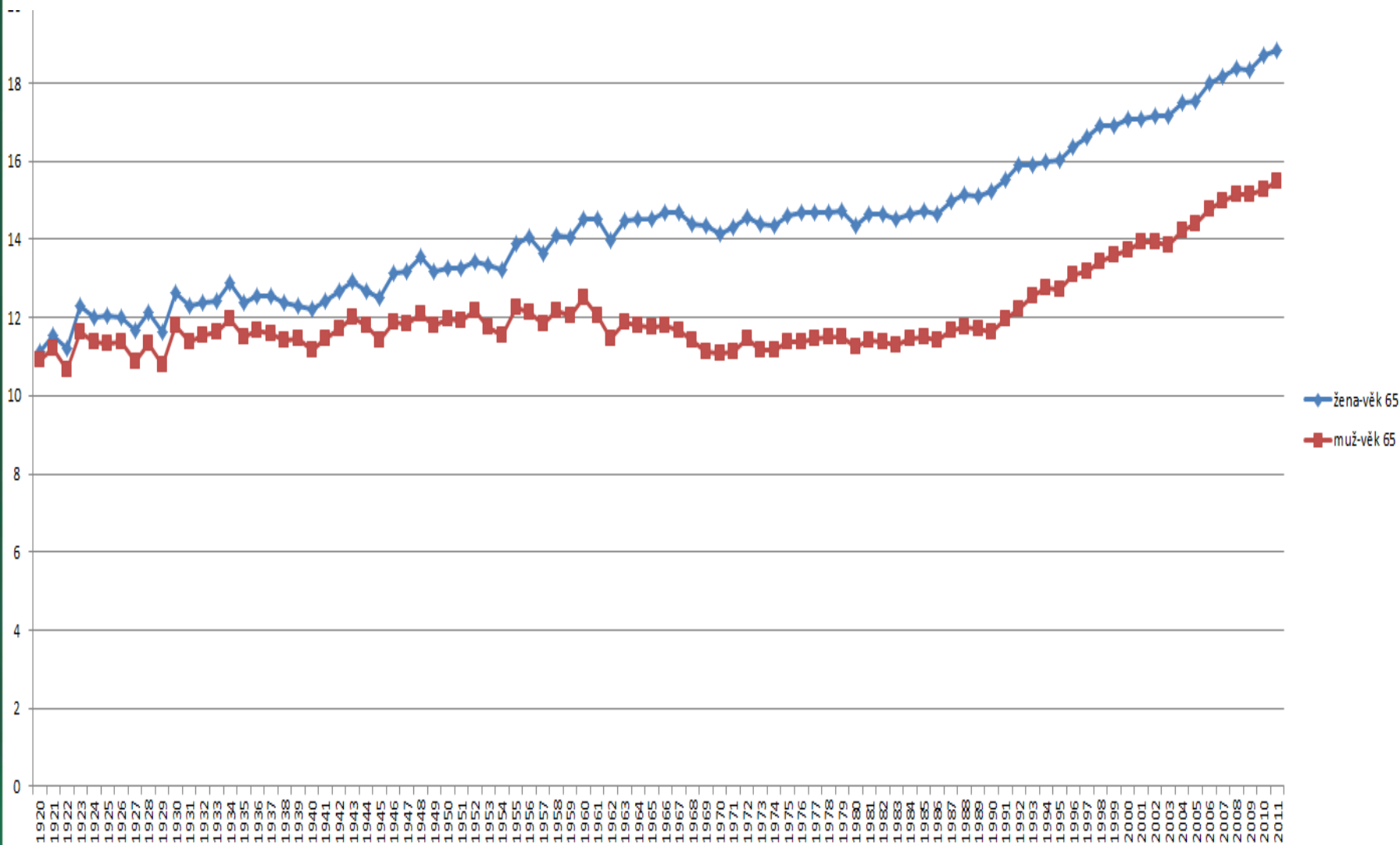
Ukázka 2 – Naděje dožití u nás (věk 0)



Ukázka 2 – Zbývající doba dožití v NL (věk 65)



Ukázka 2 – Zbývající doba dožití u nás (věk 65)



Agenda

- ▶ Úvod
- ▶ Trend v úmrtnosti
- ▶ **Modelování úmrtnosti v pojistném kmeni**
- ▶ Modely úmrtnosti
 - ▶ Statistické metody
 - ▶ Lee Carter
 - ▶ Další modely s diskretním časem
 - ▶ Cairns Blake Dowd model
 - ▶ Projekce v LC a CBD
- ▶ Vyhlazování dat
- ▶ Projekce pomocí cílové tabulky
- ▶ Pravděpodobnost úmrtí ve vysokých věcích

Modelování úmrtnosti v pojistném kmeni

- ▶ Hladina úmrtností pojištěných odlišná od hladiny v populaci
- ▶ Využití selekčních koeficientů (počáteční selekce, úrovňová selekce)

- ▶ 2 způsoby stanovení úmrtnosti v pojistném kmeni:
 - ▶ přímý výpočet - výpočet $q(t,x)$ přímo z vlastních dat a následná tvorba úmrtnostní tabulky z vypočtených hodnot – problém dostatku dat
 - ▶ přes selekční koeficienty - stanovení $q(t,x)$ a projekce z dat populace, využití vlastních (kmenových) dat k určení správné hladiny pomocí selekčních koeficientů (úrovňová a počáteční selekce)

- ▶ modelování založeno na různých předpokladech:
 - ▶ přímo pravděpodobností úmrtí $q(t,x)$
 - ▶ modelování specifických měr $m(t,x)$

Výpočet selekčních koeficientů

- ▶ zvlášť pro jednotlivé skupiny (věk, pohlaví, typ produktu, bydliště, zdravotní stav, trvání pojištění)
- ▶ úrovněová selekce f_x - rozdíl mez hladinou v populaci a v pojistném kmeni
- ▶ počáteční selekce z_x - rozdíl v hladině vlivem zdravotního underwrittingu

$$f_x = \frac{\sum_t D(t, x)}{\sum_t q(t, x)E(t, x)}$$

$$z_x = \frac{\sum_t D(t, x)}{\sum_t f_x q(t, x)E(t, x)}$$

- ▶ $D(t,x)$ – skutečný počet zemřelých ve věku x a kalendářním roce t (v kmeni)
- ▶ $E(t,x)$ – počáteční expozice osob ve věku x v kalendářním roce t (v kmeni)
- ▶ $q(t,x)$ – pravděpodobnost úmrtí osoby ve věku x a kalendářním roce t (v populaci)

Agenda

- ▶ Úvod
- ▶ Trend v úmrtnosti
- ▶ Modelování úmrtnosti v pojistném kmeni
- ▶ **Modely úmrtnosti**
 - ▶ Statistické metody
 - ▶ Lee Carter
 - ▶ Další modely s diskretním časem
 - ▶ Cairns Blake Dowd model
 - ▶ Projekce v LC a CBD
- ▶ Vyhlazování dat
- ▶ Projekce pomocí cílové tabulky
- ▶ Pravděpodobnost úmrtí ve vysokých věcích

Modely úmrtnosti

Statistické metody:

- lineární regrese, redukční faktory, p-spline

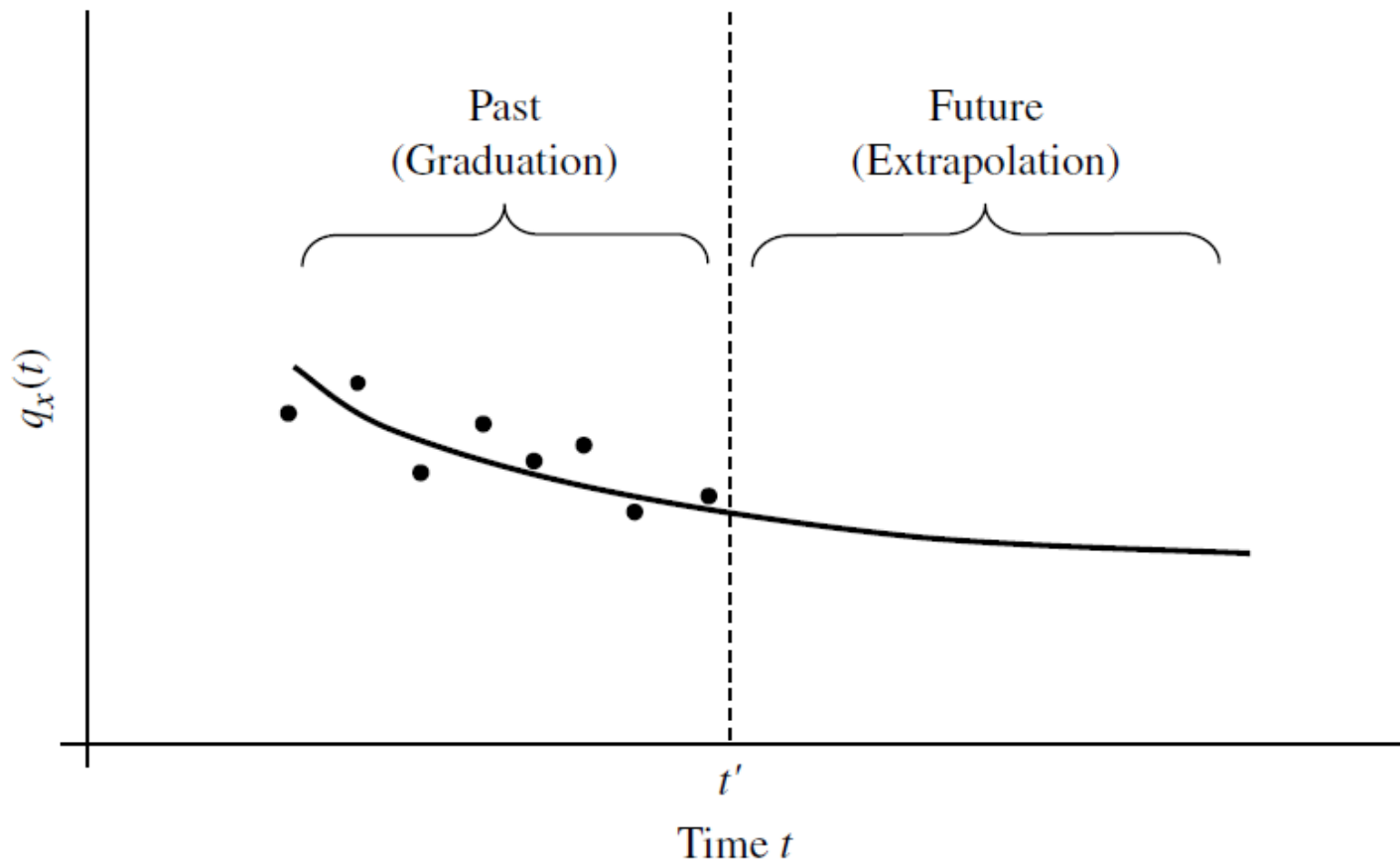
Stochastické modely:

- Modely s diskrétním časem
 - př. Lee Carter, Renshaw Haberman, Cairns Blake Dowd
- Modely se spojitým časem
 - využití vztahů pro $\mu(t,x)$
 - analogie modelů úrokových měr

$$d\mu(t, x) = a(t, x)dt + b(t, x)'d\tilde{W}(t)$$

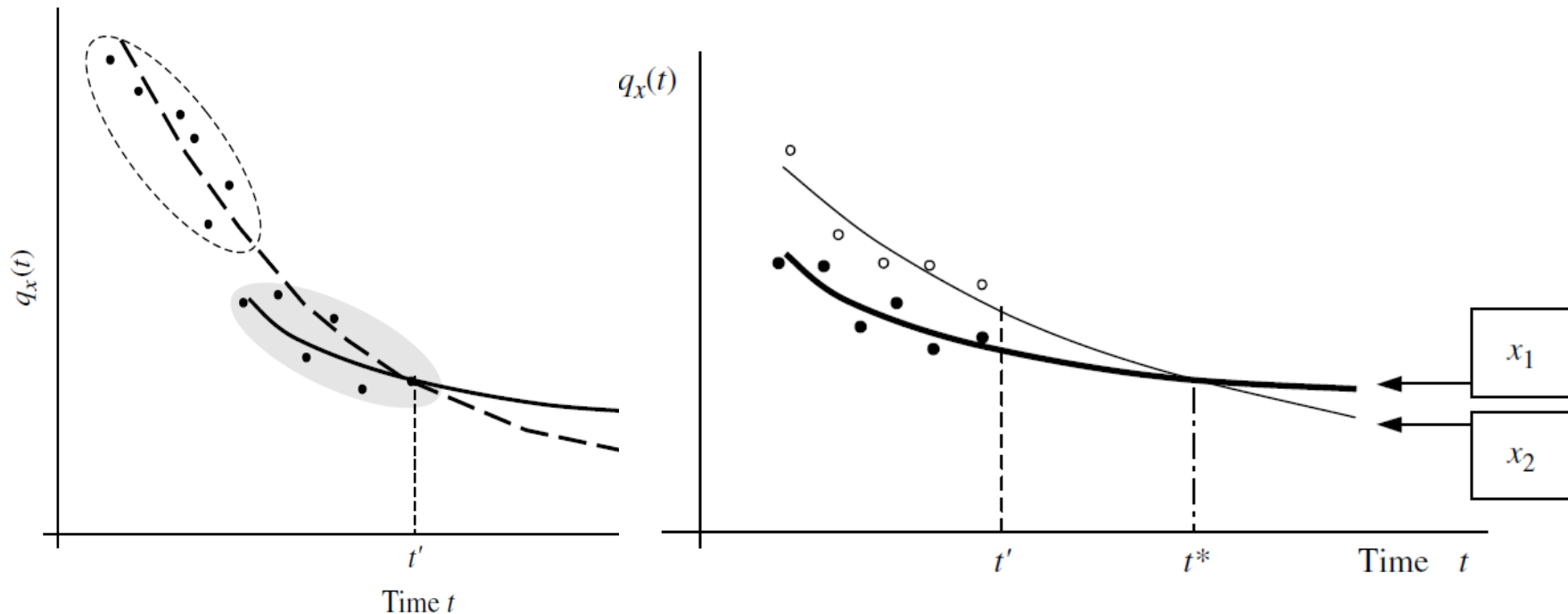
Statistické metody

- pozorování trendu v minulosti a jeho následná extrapolace do budoucnosti



Statistické metody

- ▶ snadná aplikace
- ▶ významný vliv zvoleného období (pro vyhlazení) na výslednou extrapolaci
- ▶ horizontální přístup (hrozí nekonzistence psťí úmrtí mezi věky)



Statistické metody

- ▶ zavedení redukčního faktoru: $R(t - t', x), t > t'$

$$q(t, x) = q(t', x)R(t - t', x), t > t'$$

- ▶ Př. Jednoduchý faktorový model:

- ▶ Zavádí se faktor: $f(x) = \sqrt[p]{\frac{q(t', x)}{q(t' - p, x)}}, p > 0$

- ▶ $t' - p$ je rok poslední významné změny trendu pozorované v datech (pomocí spline fcí, grafická analýza)
- ▶ Pro budoucí úmrtnost platí

$$q(t, x) = q(t', x)f(x)^{t-t'}, t > t'$$

Statistické metody

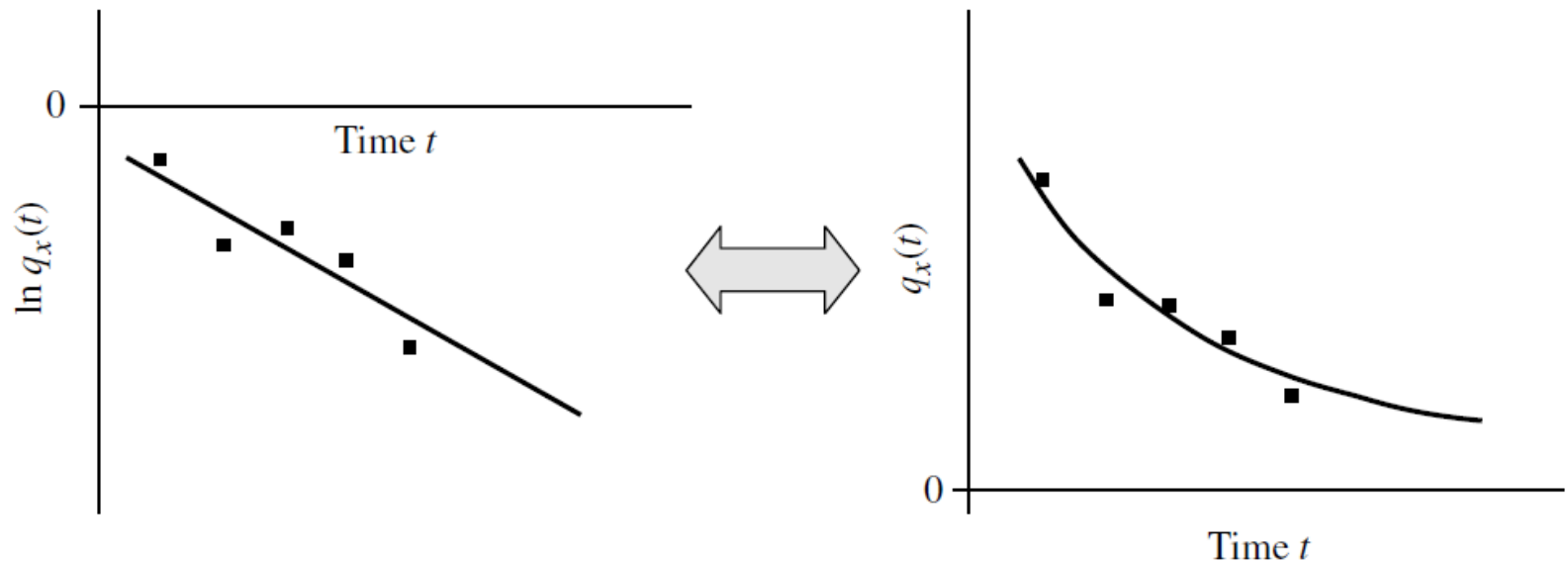
- ▶ Př. Exponenciální vzorec: (pozorování z období t_1, \dots, t_n)

$$\ln q_x(t_{h+1}) - \ln q_x(t_h) \approx -\delta_x(t_{h+1} - t_h), \quad h = 1, \dots, n - 1$$

tedy

$$\frac{q_x(t_{h+1})}{q_x(t_h)} \approx e^{-\delta_x(t_{h+1} - t_h)}$$

Nalezení δ_x metodou nejmenších čtverců



Statistické metody

- ▶ zobecnění exponenciálního vzorce: $q_x(t) = a_x + b_x c_x^t$
- ▶ další možné vzorce:

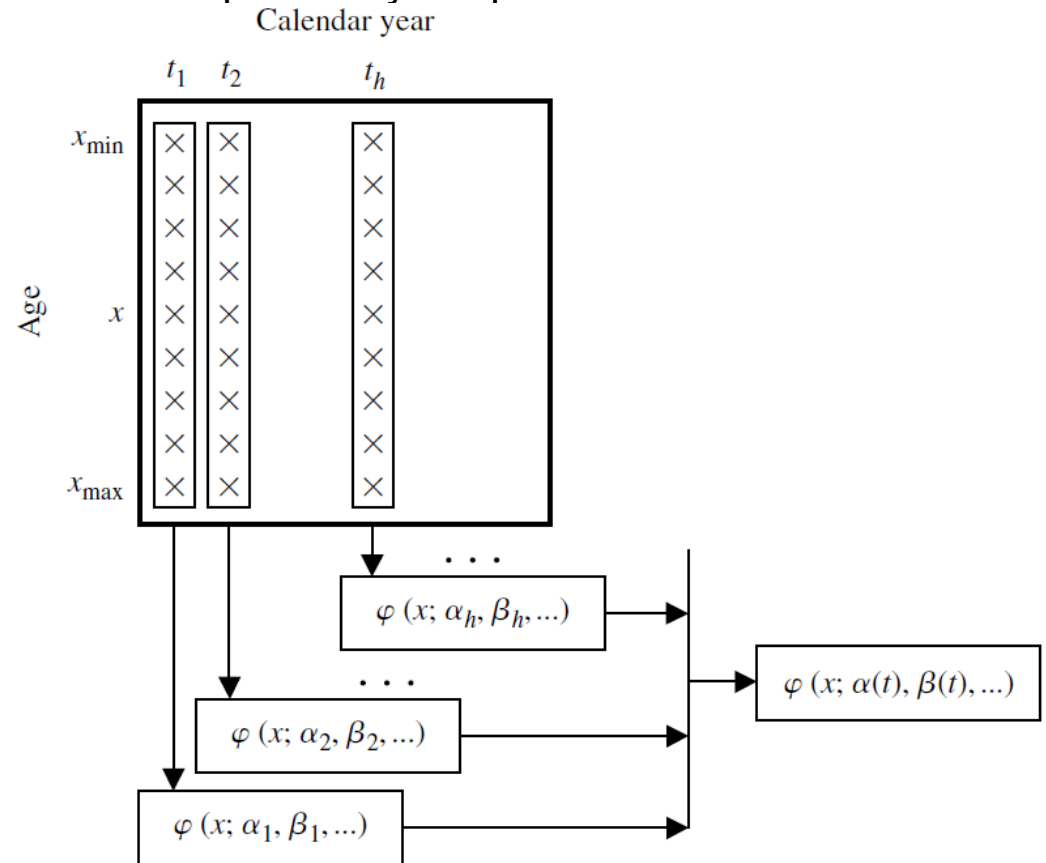
$$q_x(t) = a_x + \frac{b_x}{t},$$

$$q_x(t) = \sum_{h=0}^p a_{x,h} t^h, \text{ pro } p=3 \text{ Esscherův vzorec)}$$

$$q_x(t) = \frac{e^{G_x(t)}}{1+e^{G_x(t)}}, \text{ kde } G_x(t) = \sum_{h=0}^p c_{x,h} t^h$$

Statistické metody

- ▶ Použití zákonů úmrtnosti: $\mu_x(t) = \varphi(x; \alpha(t), \beta(t), \dots)$
 - ▶ parametry $\alpha(t), \beta(t), \dots$ se odhadnou pro každý rok pozorování t (MNČ, min χ^2 , max. věrohodnost)
 - ▶ jednotlivé parametry se v čase proloží křivkou



Agenda

- ▶ Úvod
- ▶ Trend v úmrtnosti
- ▶ Modelování úmrtnosti v pojistném kmeni
- ▶ Modely úmrtnosti
 - ▶ Statistické metody
 - ▶ **Lee Carter**
 - ▶ Další modely s diskretním časem
 - ▶ Cairns Blake Dowd model
 - ▶ Projekce v LC a CBD
- ▶ Vyhlazování dat
- ▶ Projekce pomocí cílové tabulky
- ▶ Pravděpodobnost úmrtí ve vysokých věcích

Lee Carter model

- ▶ Lee Carter (1992): $\ln m(t, x) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} k_t^{(2)}$
 - ▶ jednofaktorový model
 - ▶ bez dodatečných podmínek nemá jednoznačné řešení
 - ▶ často dodatečné podmínky typu $\sum_x \beta_x^{(2)} = 1, \sum_t k_t^{(2)} = 0$

$$(k_{t_n} = 0, \sum_{x=x_1}^{x_m} \beta_x^2 = 1)$$

Kalibrace Lee Carter

- ▶ Model LC ve tvaru: $\ln \widehat{m}_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_x(t)$

- ▶ Singulární dekompozice:

- ▶ Minimalizujeme výraz:
$$\mathcal{O}_{LS}(\alpha, \beta, \kappa) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} \left(\ln \widehat{m}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t \right)^2$$

- ▶ Odtud:
$$\widehat{\alpha}_x = \frac{1}{t_n - t_1 + 1} \sum_{t=t_1}^{t_n} \ln \widehat{m}_x(t)$$

- ▶ Odhad $\widehat{\beta}_x$ a $\widehat{\kappa}_t$ z matice

$$Z = \ln \widehat{M} - \widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \ln \widehat{m}_{x_1}(t_1) - \widehat{\alpha}_{x_1} & \cdots & \ln \widehat{m}_{x_1}(t_n) - \widehat{\alpha}_{x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln \widehat{m}_{x_m}(t_1) - \widehat{\alpha}_{x_m} & \cdots & \ln \widehat{m}_{x_m}(t_n) - \widehat{\alpha}_{x_m} \end{pmatrix}$$

- ▶ Minimalizujeme výraz:
$$\widetilde{\mathcal{O}}_{LS}(\beta, \kappa) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} \left(z_{xt} - \beta_x \kappa_t \right)^2$$

Kalibrace Lee Carter

- ▶ Lze odvodit, že nejlepší odhad matice Z je $Z \approx Z^* = \sqrt{\lambda_1} v_1 u_1^T$

- ▶ Odtud
$$\hat{\beta} = \frac{v_1}{\sum_{j=1}^{x_m - x_1 + 1} v_{1j}} \quad \hat{\kappa} = \sqrt{\lambda_1} \left(\sum_{j=1}^{x_m - x_1 + 1} v_{1j} \right) u_1$$

- ▶ Newton-Raphsonova metoda: $\mathcal{O}_{LS}(\alpha, \beta, \kappa)$

- ▶ Parciální derivace podle parametrů položeny rovno 0 dávají soustavu rovnic

$$0 = \sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln \hat{m}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t), \quad x = x_1, x_2, \dots, x_m$$

$$0 = \sum_{x=x_1}^{x_m} \beta_x (\ln \hat{m}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t), \quad t = t_1, t_2, \dots, t_n$$

$$0 = \sum_{t=t_1}^{t_n} \kappa_t (\ln \hat{m}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t), \quad x = x_1, x_2, \dots, x_m$$

Kalibrace Lee Carter

- ▶ Iterační proces odhadu parametrů založen na rekurzivní formuli

$$\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} - \frac{f(\xi^{(k)})}{f'(\xi^{(k)})}$$

- ▶ Konkrétně tedy

$$\widehat{\alpha}_x^{(k+1)} = \widehat{\alpha}_x^{(k)} + \frac{\sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln \widehat{m}_x(t) - \widehat{\alpha}_x^{(k)} - \widehat{\beta}_x^{(k)} \widehat{\kappa}_t^{(k)})}{t_n - t_1 + 1}$$

$$\widehat{\kappa}_t^{(k+1)} = \widehat{\kappa}_t^{(k)} + \frac{\sum_{x=x_1}^{x_m} \widehat{\beta}_x^{(k)} (\ln \widehat{m}_x(t) - \widehat{\alpha}_x^{(k+1)} - \widehat{\beta}_x^{(k)} \widehat{\kappa}_t^{(k)})}{\sum_{x=x_1}^{x_m} (\widehat{\beta}_x^{(k)})^2}$$

$$\widehat{\beta}_x^{(k+1)} = \widehat{\beta}_x^{(k)} + \frac{\sum_{t=t_1}^{t_n} \widehat{\kappa}_t^{(k+1)} (\ln \widehat{m}_x(t) - \widehat{\alpha}_x^{(k+1)} - \widehat{\beta}_x^{(k)} \widehat{\kappa}_t^{(k+1)})}{\sum_{t=t_1}^{t_n} (\widehat{\kappa}_t^{(k+1)})^2}$$

Kalibrace Lee Carter

- ▶ Metoda max. věrohodnosti s předp. Poiss:
 - ▶ jsou dostupné expozice a počty úmrtí $E(t,x)$, $D(t,x)$
 - ▶ předp.: $D(t,x) \sim \text{Poiss}(E(t,x)\exp(\alpha_x + \beta_x k_t))$

- ▶ Maximalizujeme logaritmickou věrohodnostní funkci:

$$L(\alpha, \beta, k) = \sum_x \sum_t (D(t, x)(\alpha_x + \beta_x k_t) - E(t, x) \exp(\alpha_x + \beta_x k_t)) + \textit{konstanta}$$

- ▶ Aplikujeme Nexton-Raphsonovu metodu

Ukázka na datech Belgie

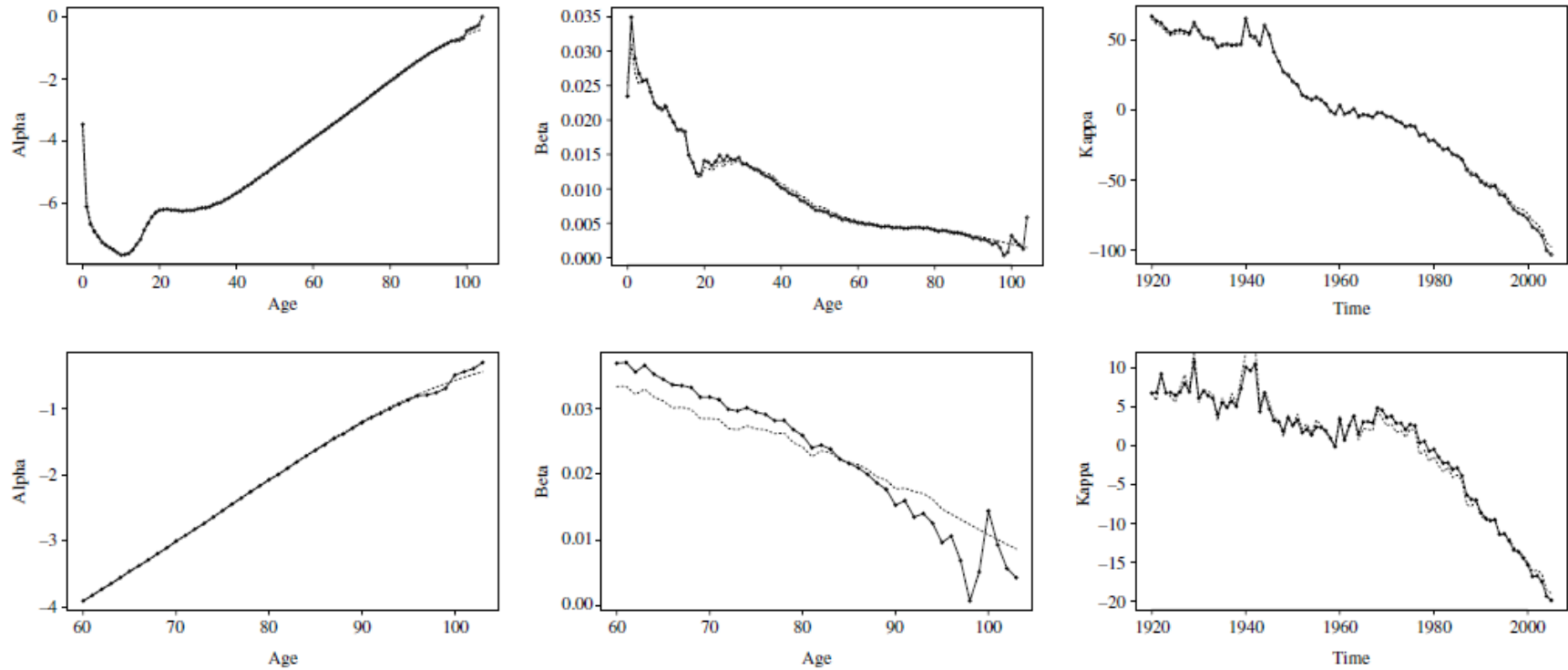
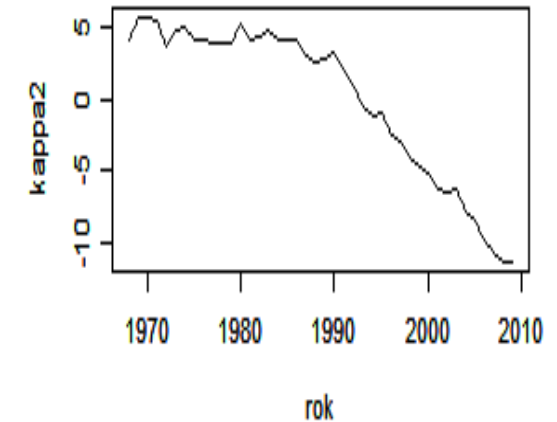
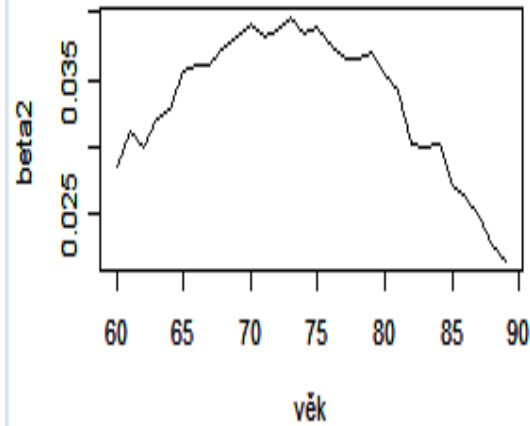
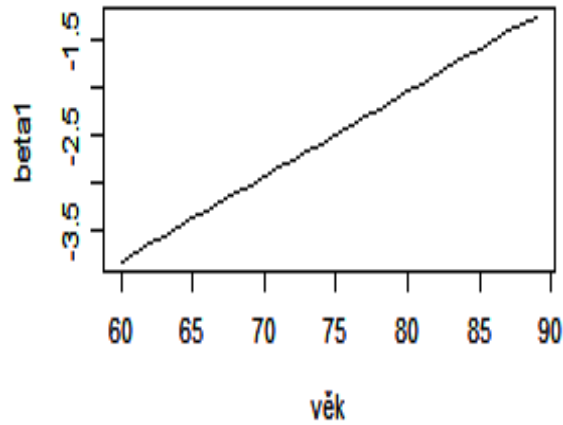
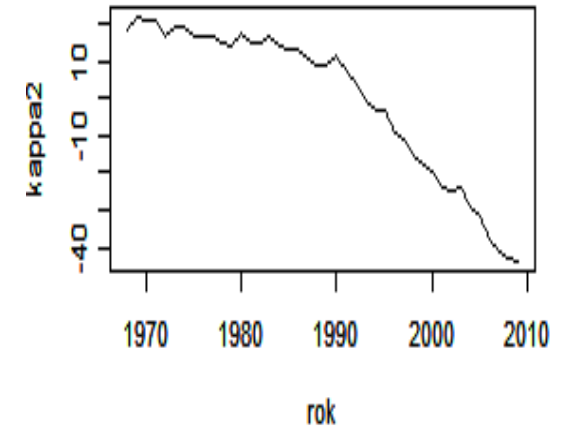
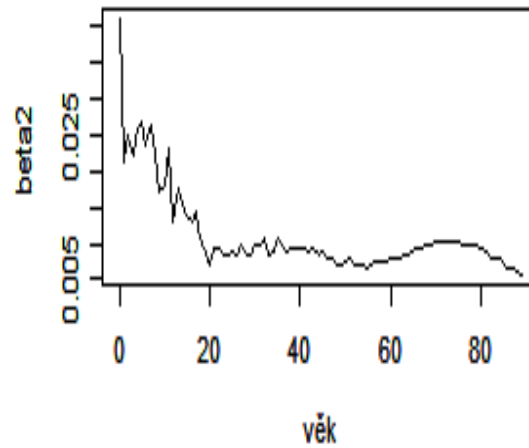
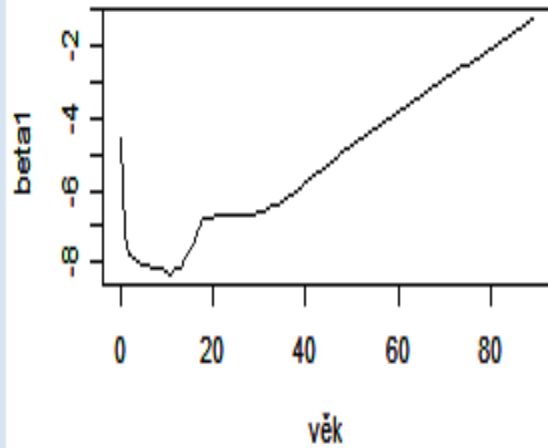


Figure 5.3. Estimated α_x , β_x , and κ_t (from left to right), $x = 0, 1, \dots, 104$ (top panels) and $x = 60, 61, \dots, 104$ (bottom panels), $t = 1920, 1921, \dots, 2005$, obtained with HMD data by maximizing the Poisson log-likelihood (5.21) (the values obtained by least-squares are displayed in broken line).

Ukázka na datech ČR



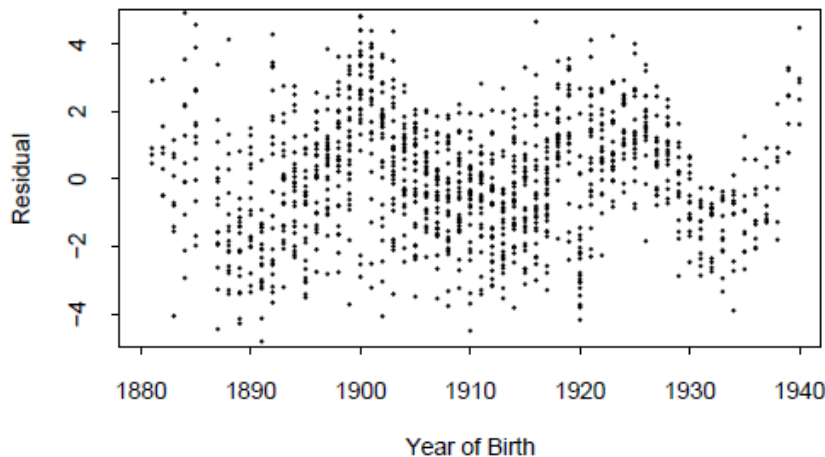
Agenda

- ▶ Úvod
- ▶ Trend v úmrtnosti
- ▶ Modelování úmrtnosti v pojistném kmeni
- ▶ Modely úmrtnosti
 - ▶ Statistické metody
 - ▶ Lee Carter
 - ▶ **Další modely s diskretním časem**
 - ▶ Cairns Blake Dowd model
 - ▶ Projekce v LC a CBD
- ▶ Vyhlazování dat
- ▶ Projekce pomocí cílové tabulky
- ▶ Pravděpodobnost úmrtí ve vysokých věcích

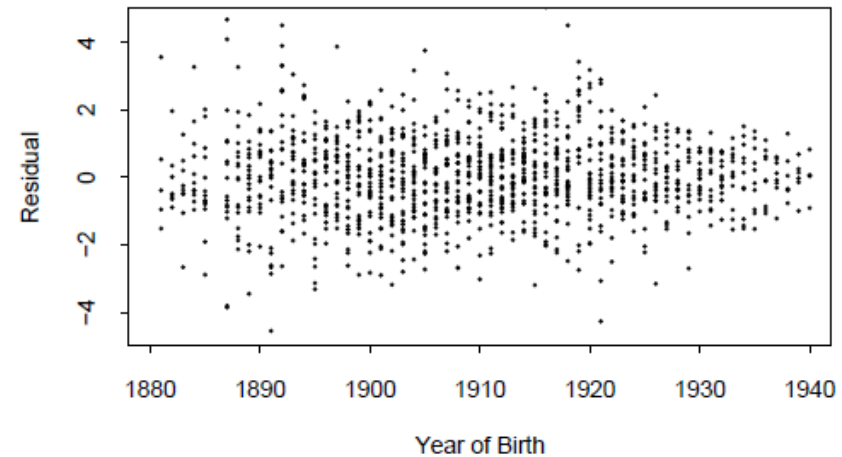
Další modely s diskrétním časem

- ▶ Renshaw Haberman (2006): $\ln m(t, x) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} k_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} \gamma_{t-x}^{(3)}$
 - ▶ zobecnění LC modelu (zahrnutí efektu kohort)
 - ▶ dvoufaktorový model $k_t^{(2)}, \gamma_{t-x}^{(3)}$
 - ▶ oproti LC vylepšení kalibrace (zohlednění kohort dle roku narození t-x)
 - ▶ nevýhodou je (ne)robustnost (vysoká závislost výsledné kalibrace vzhledem k množství dat zahrnutých do odhadu) – věrohodnostní funkce má více maxim

Lee-Carter Model



Renshaw-Haberman Cohort Model



Další modely s diskretním časem

- ▶ Currie (2006): $\ln m(t, x) = \beta_x^{(1)} + k_t^{(2)} + \gamma_{t-x}^{(3)}$
 - ▶ zjednodušení RH modelu (vliv jednotlivých efektů je nezávislý)

Agenda

- ▶ Úvod
- ▶ Trend v úmrtnosti
- ▶ Modelování úmrtnosti v pojistném kmeni
- ▶ Modely úmrtnosti
 - ▶ Statistické metody
 - ▶ Lee Carter
 - ▶ Další modely s diskretním časem
 - ▶ **Cairns Blake Dowd model**
 - ▶ Projekce v LC a CBD
- ▶ Vyhlazování dat
- ▶ Projekce pomocí cílové tabulky
- ▶ Pravděpodobnost úmrtí ve vysokých věcích

Cairns Blake Dowd model

- ▶ Cairns Blake Dowd (2006): $\text{logit } q(t, x) = \ln \frac{q(t, x)}{1 - q(t, x)} = k_t^{(1)} + k_t^{(2)} x$
 - ▶ dvoufaktrový model, $(k_t^{(1)}, k_t^{(2)})$
 - ▶ určeno pro úmrtnosti ve vyšších věcích (60-89 let)
 - ▶ neobsahuje efekt kohort
 - ▶ postupně vzniklo několik variant CBD modelu

$$\text{logit } q(t, x) = \ln \frac{q(t, x)}{1 - q(t, x)} = k_t^{(1)} + k_t^{(2)} (x - \bar{x})$$

$$\text{logit } q_{x,t} = \ln \frac{q_{x,t}}{1 - q_{x,t}} = k_t^{(1)} + k_t^{(2)} (x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)}$$

$$\text{logit } q_{x,t} = \ln \frac{q_{x,t}}{1 - q_{x,t}} = k_t^{(1)} + k_t^{(2)} (x - \bar{x}) + k_t^{(3)} ((x - \bar{x})^2 - \sigma_x^2) + \gamma_{t-x}^{(4)}$$

$$\text{logit } q_{x,t} = \ln \frac{q_{x,t}}{1 - q_{x,t}} = k_t^{(1)} + k_t^{(2)} (x - \bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)} (x_c - x)$$

Kalibrace CBD

- ▶ Metoda nejmenších čtverců:
$$O_t(\kappa) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \left(\ln \frac{\widehat{q}_x(t)}{\widehat{p}_x(t)} - \kappa_t^{[1]} - \kappa_t^{[2]}x \right)^2$$
- ▶ kalibrace pro každý kalendářní rok
- ▶ Metoda max. věrohodnosti s předp. Poiss:
- ▶ analogicky jako pro LC

Agenda

- ▶ Úvod
- ▶ Trend v úmrtnosti
- ▶ Modelování úmrtnosti v pojistném kmeni
- ▶ Modely úmrtnosti
 - ▶ Statistické metody
 - ▶ Lee Carter
 - ▶ Další modely s diskretním časem
 - ▶ Cairns Blake Dowd model
 - ▶ **Projekce v LC a CBD**
- ▶ Vyhlazování dat
- ▶ Projekce pomocí cílové tabulky
- ▶ Pravděpodobnost úmrtí ve vysokých věcích

Projekce v LC a CBD modelu

- ▶ Model náhodné procházky s driftem:

LC (d parametr, ξ_t nezávislé s $N(0, \sigma^2)$): $\kappa_t = \kappa_{t-1} + d + \xi_t$

- ▶ tedy pro $k > 0$ platí
$$\kappa_{t_n+k} = \kappa_{t_n} + kd + \sum_{j=1}^k \xi_{t_n+j}$$

- ▶ a odhad je roven
$$\dot{\kappa}_{t_n+k} = \mathbb{E}[\kappa_{t_n+k} | \kappa_{t_1}, \kappa_{t_2}, \dots, \kappa_{t_n}] = \kappa_{t_n} + kd$$

- ▶ Odhady metodou max. věrohodnosti:
$$\hat{d} = \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{t=t_2}^{t_n} (\hat{\kappa}_t - \hat{\kappa}_{t-1}) = \frac{\hat{\kappa}_{t_n} - \hat{\kappa}_{t_1}}{t_n - t_1}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{t=t_2}^{t_n} (\hat{\kappa}_t - \hat{\kappa}_{t-1} - \hat{d})^2$$

Projekce v LC a CBD modelu

CBD (d_1, d_2 parametry, $\xi_t = (\xi_t^{[1]} \xi_t^{[2]})$, nezávislé s $N(0, \Sigma)$):

$$\begin{aligned} \kappa_t^{[1]} &= \kappa_{t-1}^{[1]} + d_1 + \xi_t^{[1]} \\ \kappa_t^{[2]} &= \kappa_{t-1}^{[2]} + d_2 + \xi_t^{[2]} \end{aligned}$$

- ▶ Odhady parametrů (jako v LC)

$$\widehat{d}_i = \frac{\widehat{\kappa}_{t_n}^{[i]} - \widehat{\kappa}_{t_1}^{[i]}}{t_n - t_1}, \quad i = 1, 2$$

$$\widehat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{t=t_2}^{t_n} \left(\widehat{\kappa}_t^{[i]} - \widehat{\kappa}_{t-1}^{[i]} - \widehat{d}_i \right)^2, \quad i = 1, 2$$

$$\widehat{\sigma}_{12} = \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{s=t_1}^{t_n-1} \sum_{t=t_1}^{t_n-1} \left(\widehat{\kappa}_{s+1}^{[1]} - \widehat{\kappa}_s^{[1]} - \widehat{d}_1 \right) \left(\widehat{\kappa}_{t+1}^{[2]} - \widehat{\kappa}_t^{[2]} - \widehat{d}_2 \right)$$

Agenda

- ▶ Úvod
- ▶ Trend v úmrtnosti
- ▶ Modelování úmrtnosti v pojistném kmeni
- ▶ Modely úmrtnosti
 - ▶ Statistické metody
 - ▶ Lee Carter
 - ▶ Další modely s diskretním časem
 - ▶ Cairns Blake Dowd model
 - ▶ Projekce v LC a CBD
- ▶ **Vyhlazování dat**
- ▶ Projekce pomocí cílové tabulky
- ▶ Pravděpodobnost úmrtí ve vysokých věcích

Vyhlazení reálných dat:

- ▶ Gompertz Makehamovy modely
(velké vyhlazení, ničí tvar (exponenciála), vhodné jen pro určité věky

$$\mu_x = a + b c^x$$

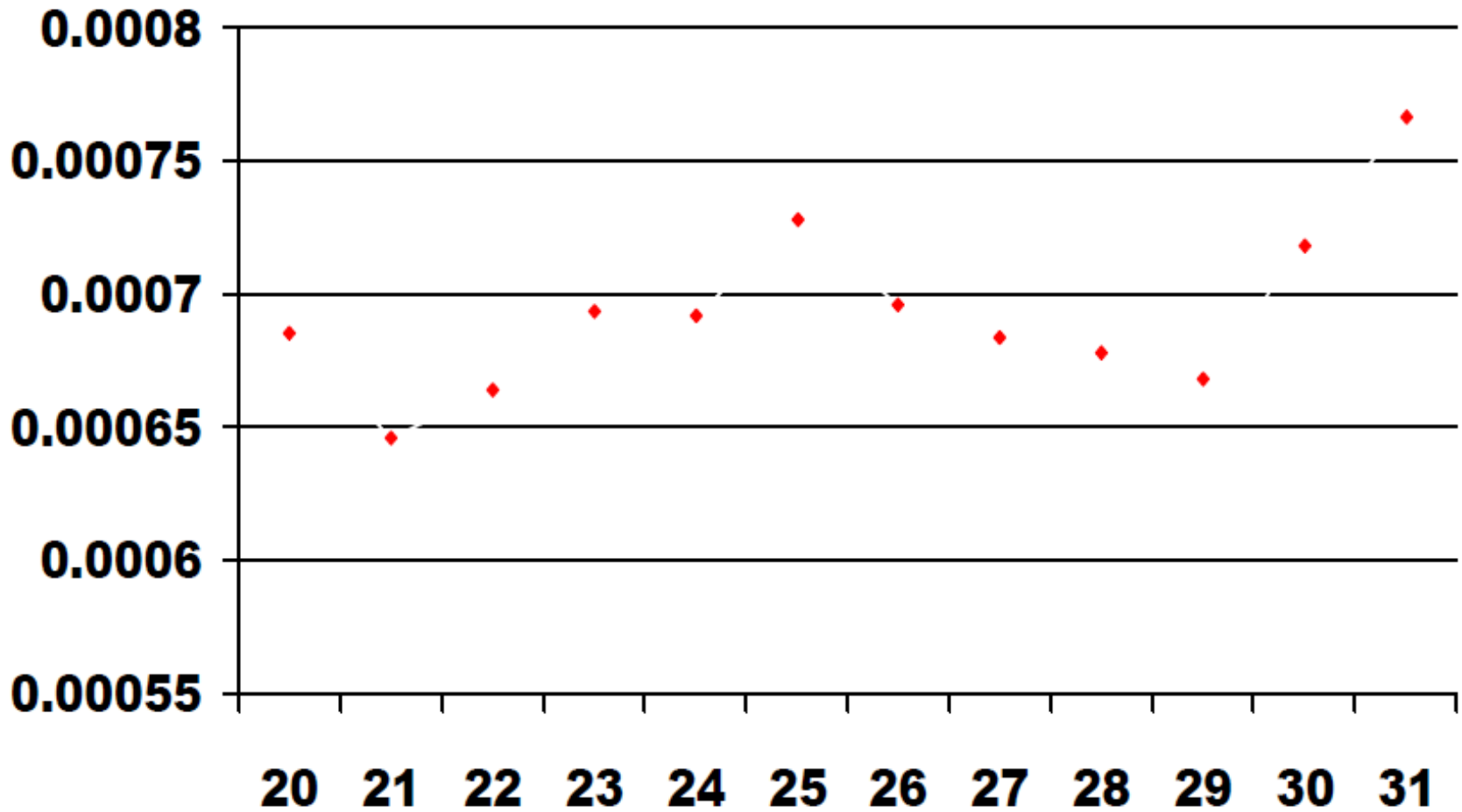
- ▶ King – Hardyho metoda (využívá ČSÚ)
- ▶ p-spline, klouzavé průměry, Whittaker - Hendersonova metoda – viz. demografie
- ▶ Alternativní metoda vyhlazení: Van Broekhovenův algoritmus (vB algoritmus)

vB algoritmus

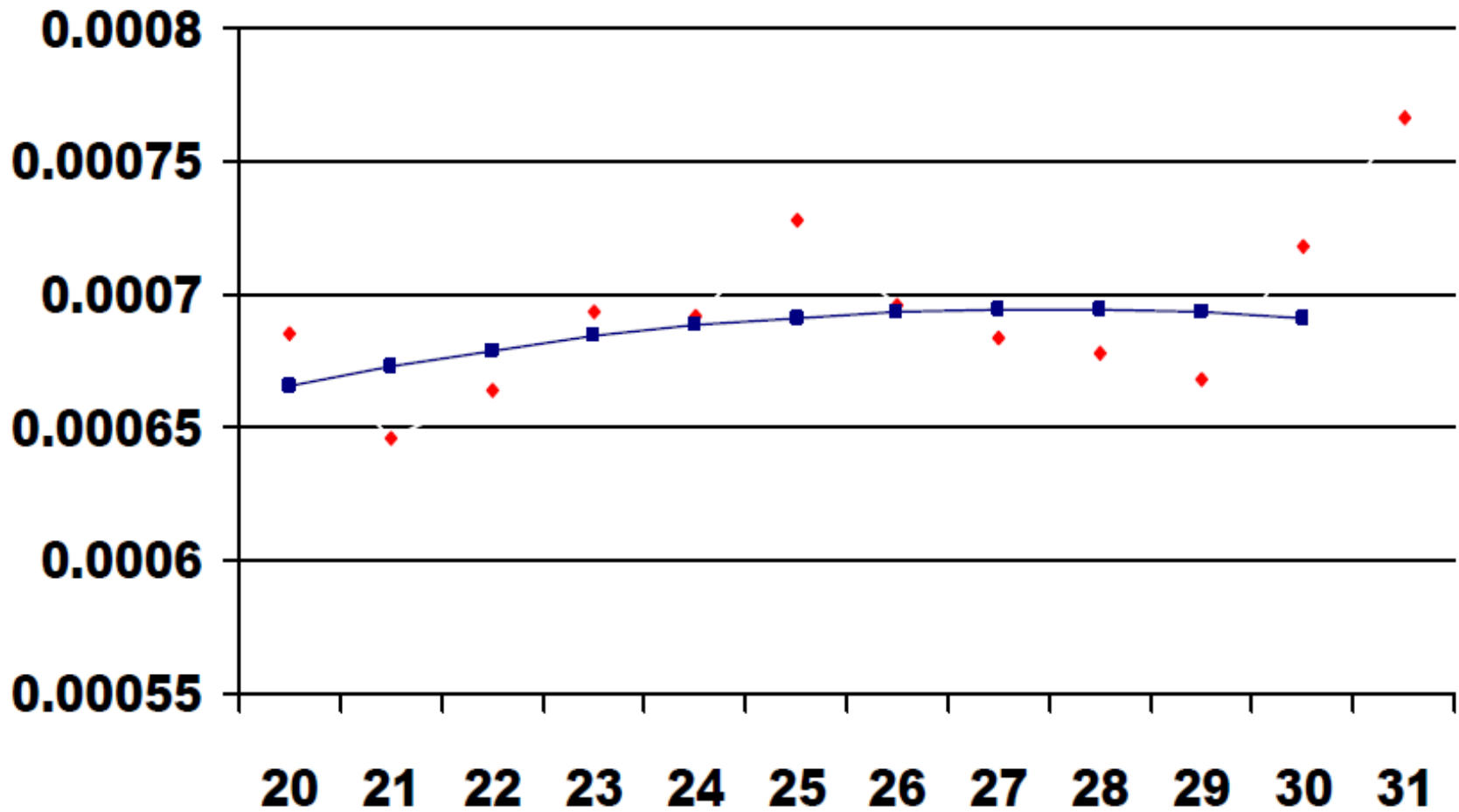
- ▶ Klouzavé průměry vážené kvadratickou funkcí přes transformaci $q(x)$
- ▶ $f(x) = \ln(-\ln(1-q(x)))$
- ▶ $f(x) = a + bx + cx^2$
- ▶ Pro pevné x se najde a, b, c pomocí pozorování $x-5, \dots, x-1, x, x+1, \dots, x+5$ metodou nejmenších čtverců
- ▶ Pro výsledné $q(x)$ platí

$$q(x) = 1 - e^{-e^{\hat{f}(x)}}$$

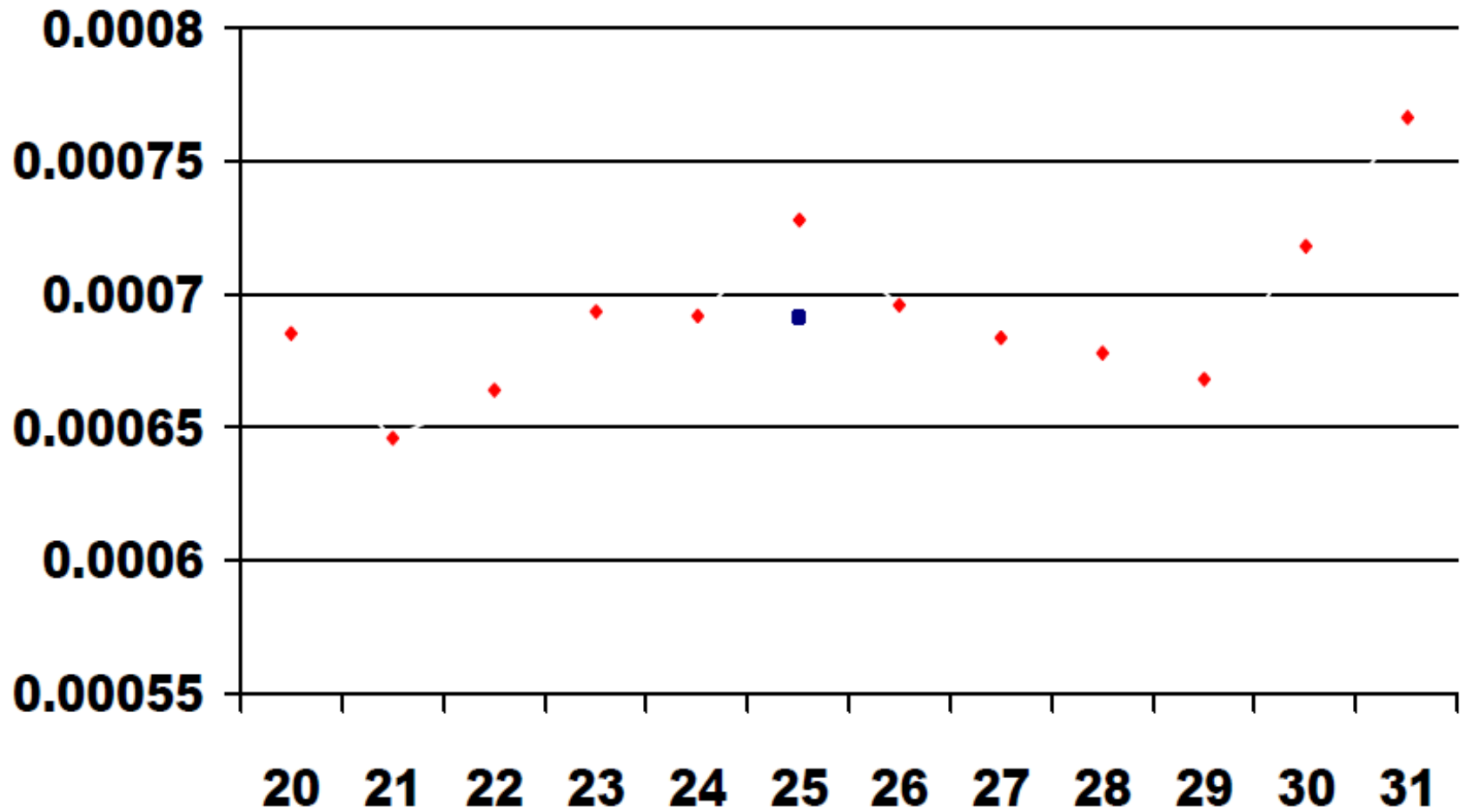
vB algorithmus



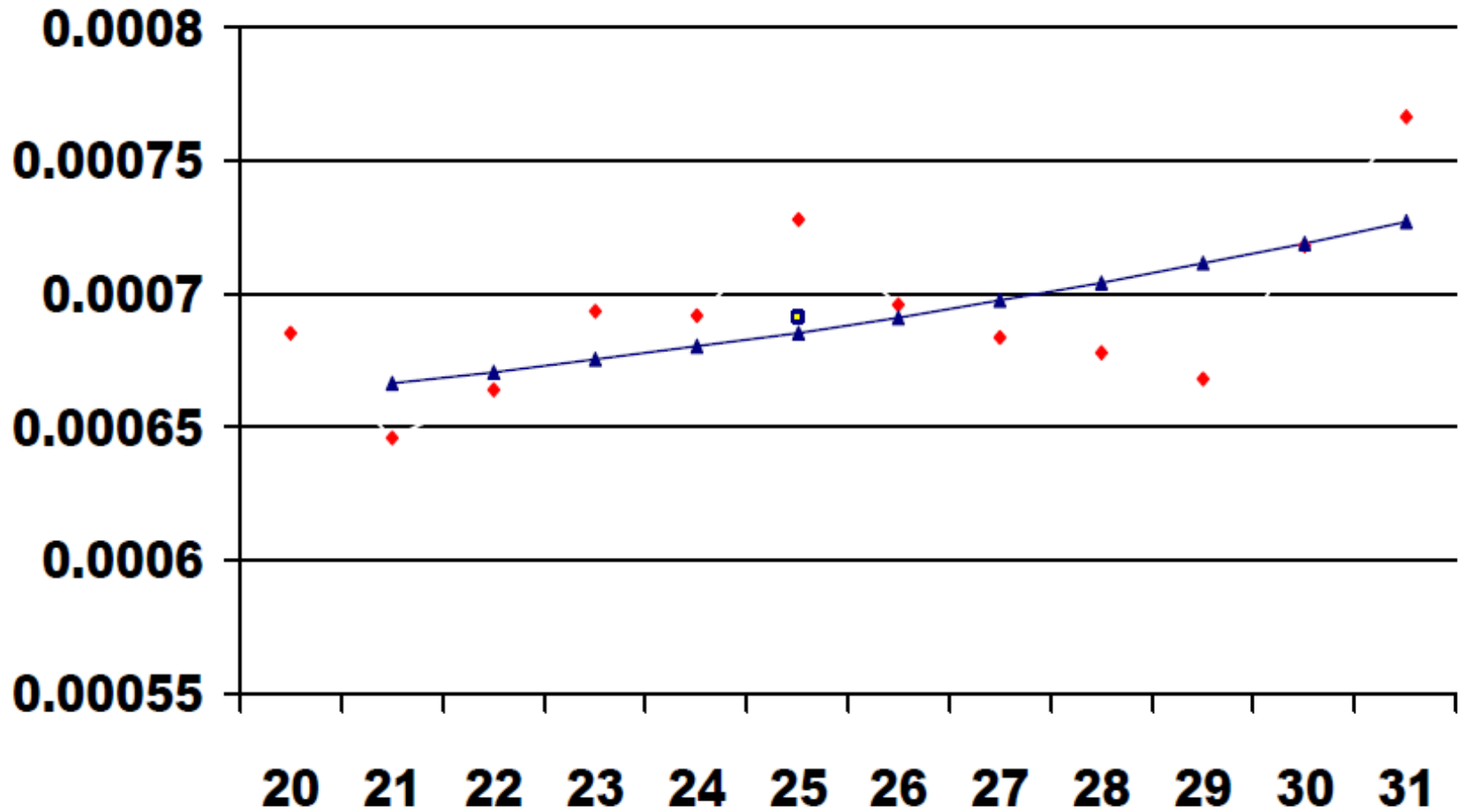
vB algorithmus



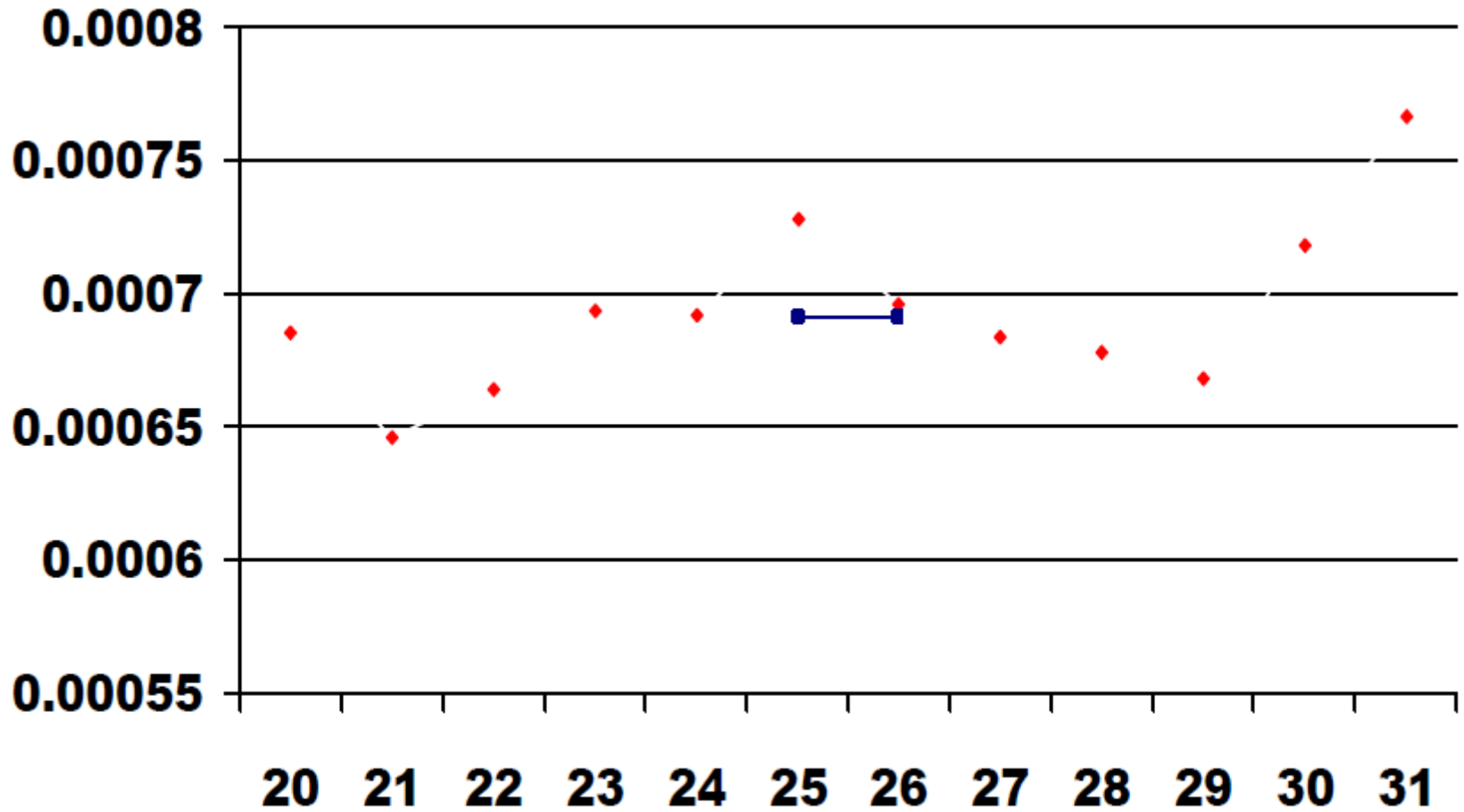
vB algorithmus



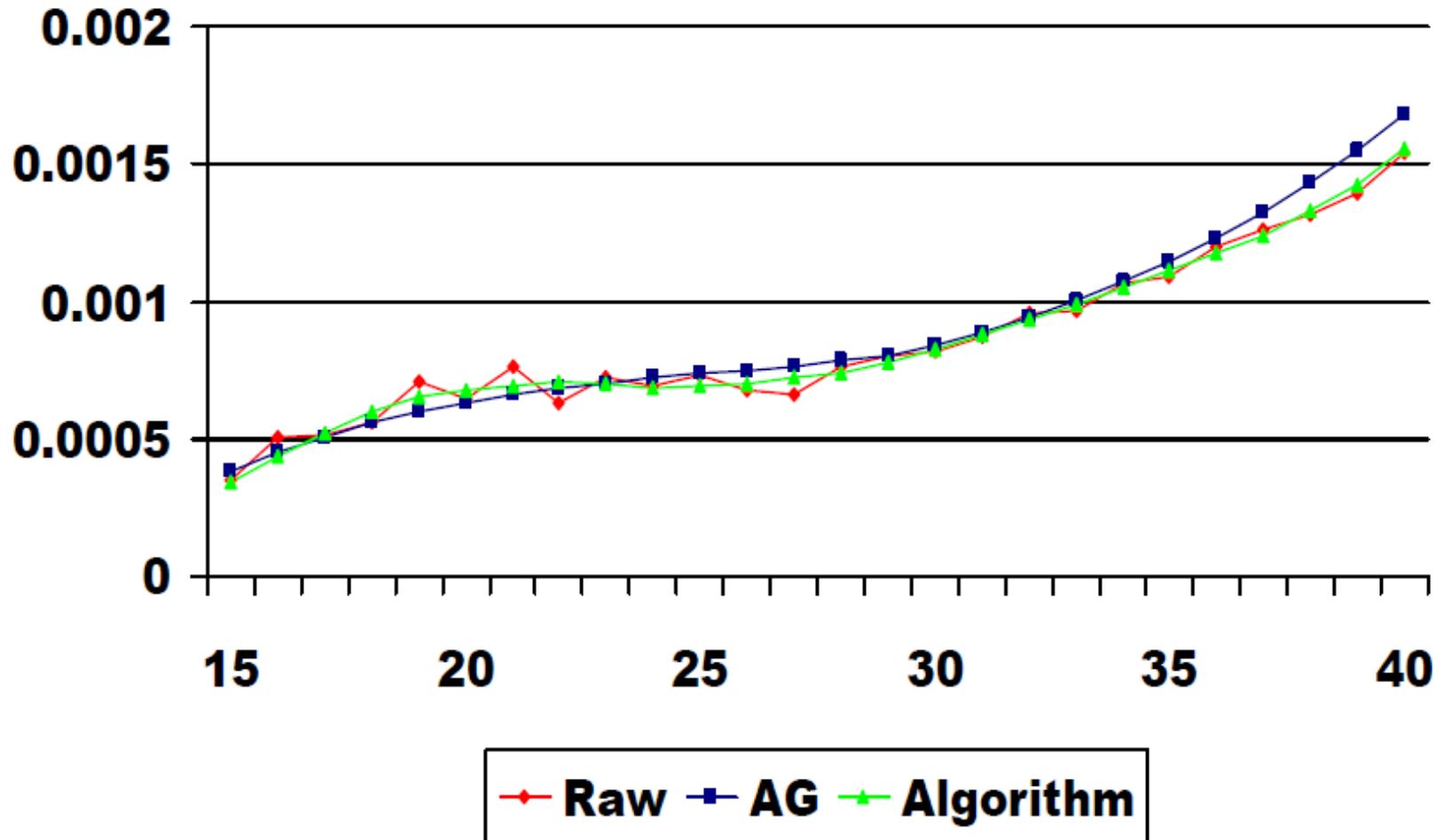
vB algorithmus



vB algorithmus



Testováno na tabulce z let 1990-1995 (NL)



Agenda

- ▶ Úvod
- ▶ Trend v úmrtnosti
- ▶ Modelování úmrtnosti v pojistném kmeni
- ▶ Modely úmrtnosti
 - ▶ Statistické metody
 - ▶ Lee Carter
 - ▶ Další modely s diskretním časem
 - ▶ Cairns Blake Dowd model
 - ▶ Projekce v LC a CBD
- ▶ Vyhlazování dat
- ▶ **Projekce pomocí cílové tabulky**
- ▶ Pravděpodobnost úmrtí ve vysokých věcích

Projekce pomocí cílové tabulky

- ▶ Problém projektovat úmrtnost do daleké budoucnosti
- ▶ Proto je užitečné zohlednit ostatní předpovědi (dle lékařů, demografů, vědců,...)
- ▶ Problém s aktuálním trendem úmrtnosti – nelze podle takového trendu projektovat příliš do budoucnosti (př. NL velmi strmý trend od 2001)
- ▶ Vhodnější než extrapolovat tabulku do budoucnosti je přiblížení k nějaké cílové tabulce v budoucnosti
- ▶ Přibližování se provádí až po vyhlazení tabulky
- ▶ Jednoduchý model trendu:

$$q(x; j + t) = q(x; j) \times f(x)^t$$

- ▶ Zobecnění:

$$q(x; j + t) = q(x; j) \times \prod_{i=1}^t f(x; j + i)$$

Projekce pomocí cílové tabulky

- ▶ Faktor $f(x; j)$ je odhadnutý z místních dat, faktor v dalších letech se definuje jako

$$f(x; j + i) = f(x; j) \times e^{i \times \alpha(x)}$$

- ▶ Tedy

$$q(x; j + t) = q(x; j) \times \prod_{i=1}^t f(x; j) \times e^{i \alpha(x)}$$

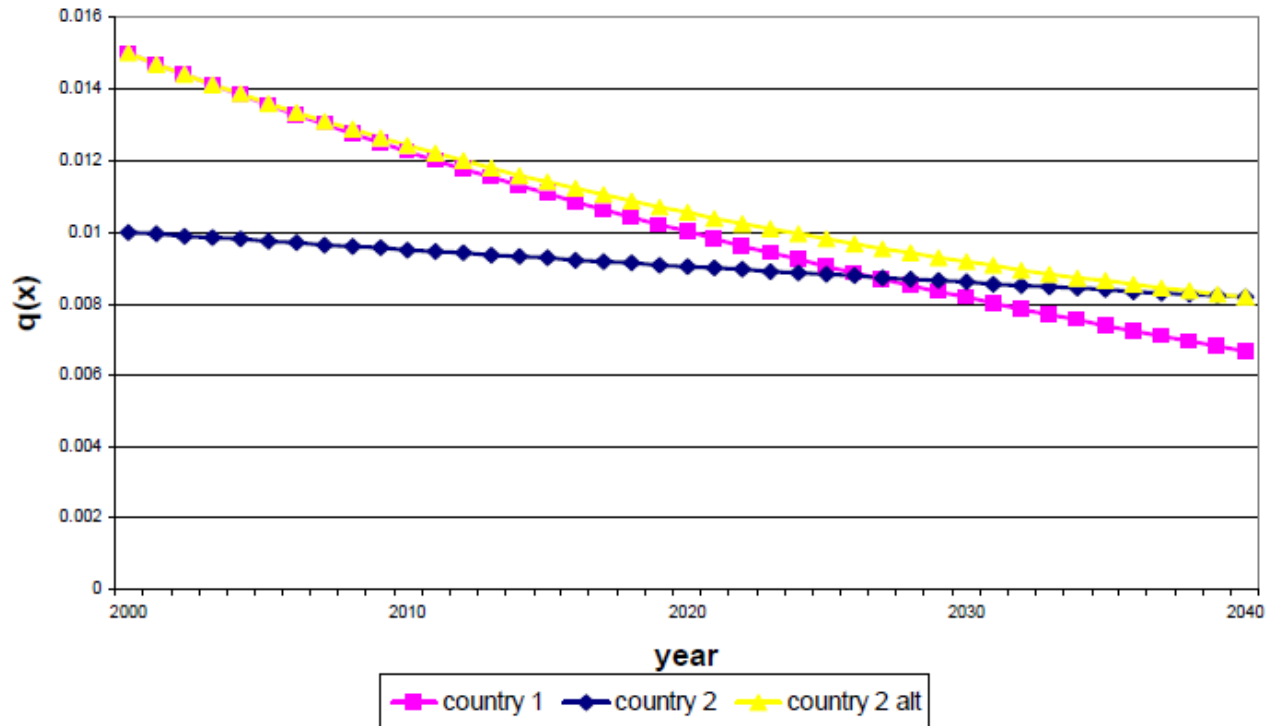
- ▶ S časem t převládá třetí faktor nad druhým

$$q(x; j + t) = q(x; j) \times f(x; j)^t \times e^{\frac{\alpha(x)t(t+1)}{2}}$$

Projekce pomocí cílové tabulky

- ▶ Výpočet parametru $\alpha(x)$

$$\alpha(x) = \frac{\log q(x; j + t_g) - \log q(x; j) - t_g \times \log f(x; j)}{\frac{1}{2} \times t_g \times (t_g + 1)}$$



Agenda

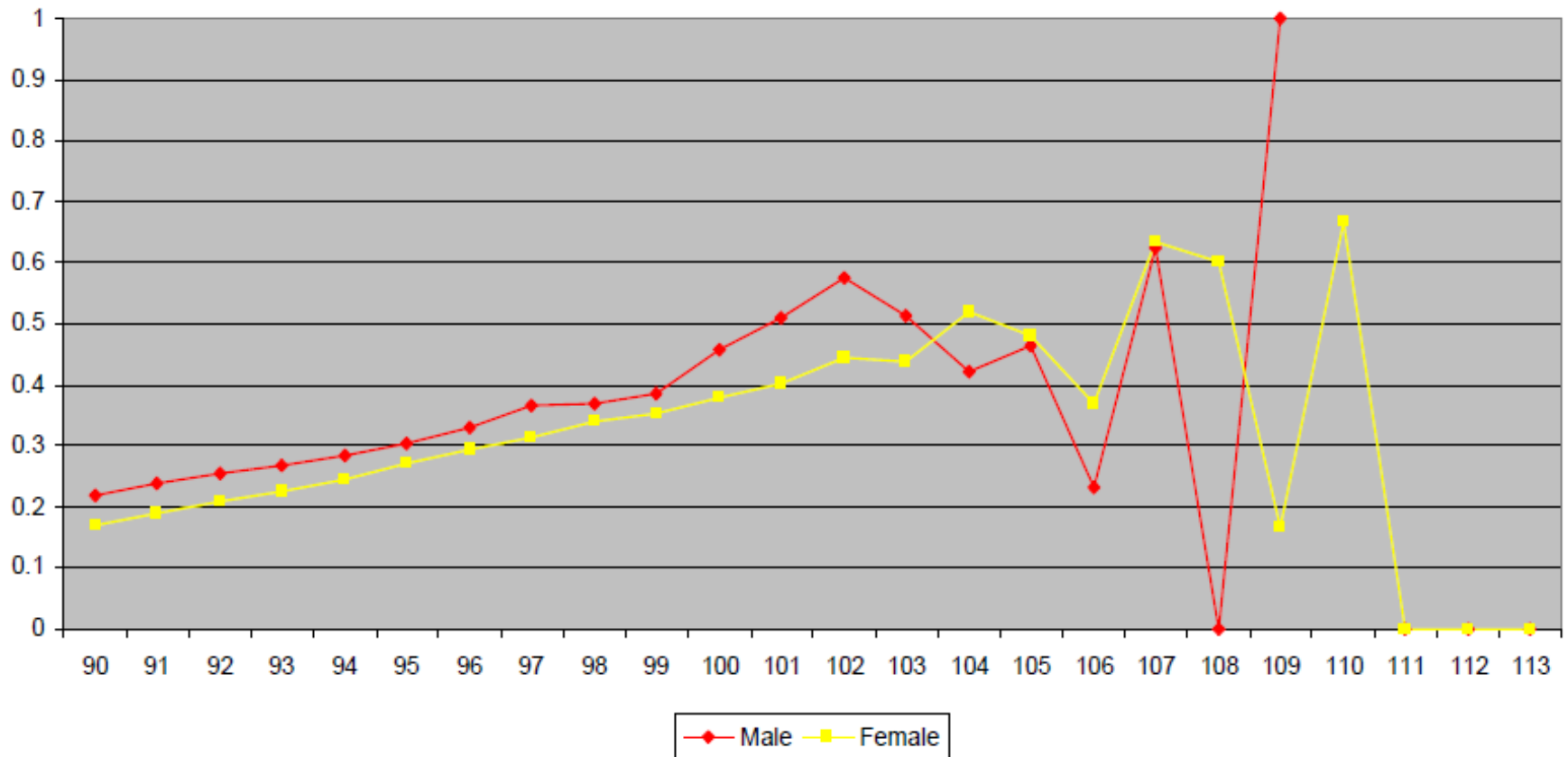
- ▶ Úvod
- ▶ Trend v úmrtnosti
- ▶ Modelování úmrtnosti v pojistném kmeni
- ▶ Modely úmrtnosti
 - ▶ Statistické metody
 - ▶ Lee Carter
 - ▶ Další modely s diskretním časem
 - ▶ Cairns Blake Dowd model
 - ▶ Projekce v LC a CBD
- ▶ Vyhlazování dat
- ▶ Projekce pomocí cílové tabulky
- ▶ **Pravděpodobnost úmrtí ve vysokých věcích**

Pravděpodobnost úmrtí ve vysokých věcích

- ▶ Pravděpodobnost úmrtí nad 105 let je spíše konstantní nebo roste jen velmi mírně (mezi 0,5 až 0,6 – „binomický proces“)
- ▶ Záleží velmi na zemi
- ▶ Omega – maximální věk dožití – opravdu se zvyšuje?
 - ▶ Možná se jen více lidí dožívá 105 let a pak „hází mincí“, proto i víc lidí hodí panu

Pravděpodobnost úmrtí ve vysokých věcích - NL

Mortality rates at high ages
Dutch raw observations 1995-2000



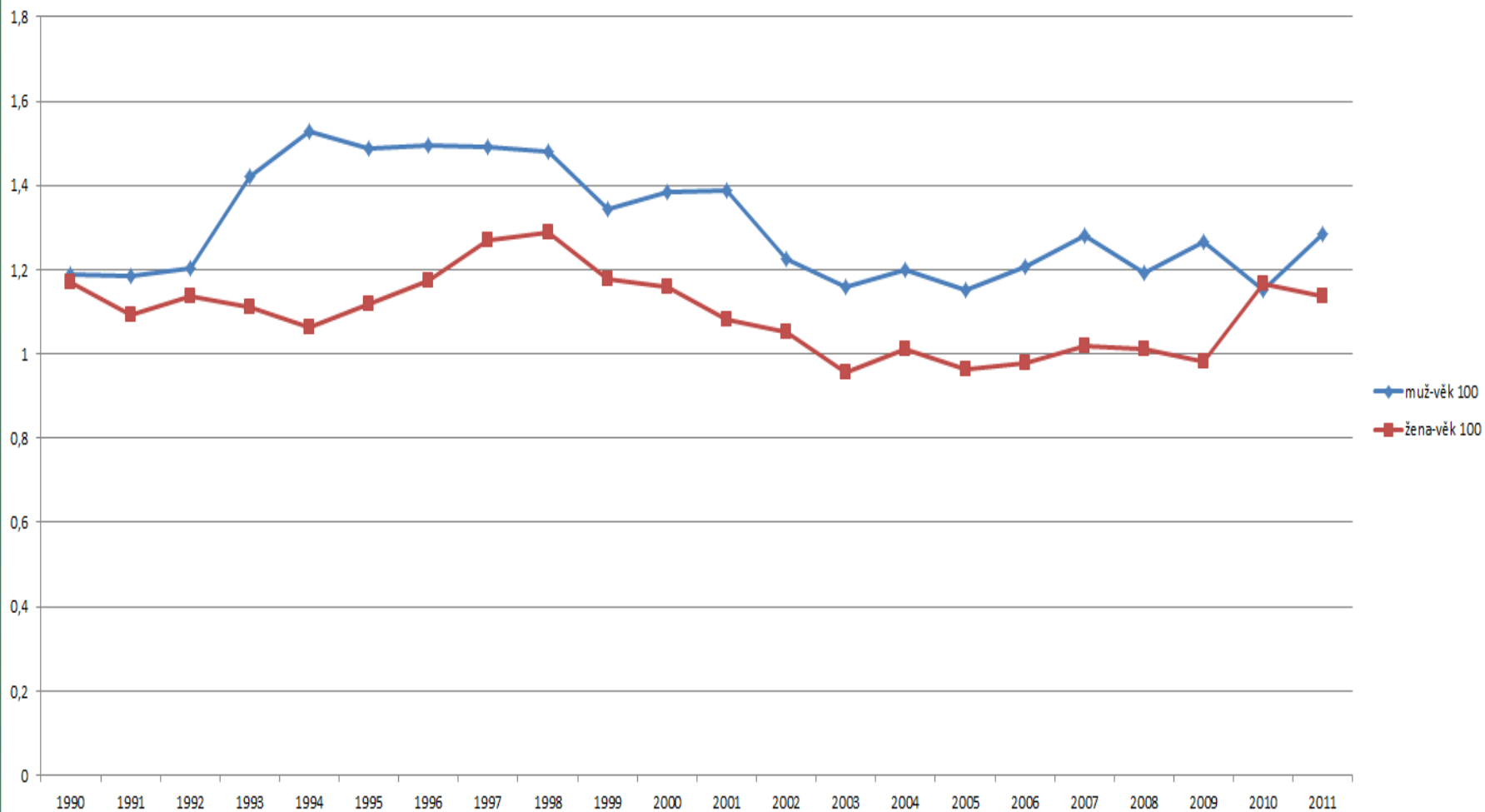
Pravděpodobnost úmrtí ve vysokých věcích

- ▶ Pro vysoké věky nefunguje vB algoritmus
 - ▶ Data jsou příliš volatilní
 - ▶ Transformace nefunguje pro $q(x) = 1$ a $q(x) = 0$
- ▶ V čase se nemění zbývající doba dožití ve vysokých věcích (žádné zvýšení, spíše snížení)
- ▶ Minimální rozdíl mezi muži a ženami

Zbývající doba dožití ve 100 letech (NL)

Period	Male	Female
1971-1975	1.78	1.92
1976-1980	1.91	2.18
1981-1985	1.96	2.09
1986-1990	1.96	2.12
1991-1995	1.79	1.92
1996-2000	1.55	1.93

Zbývající doba dožití ve 100 letech (ČR)



Pravděpodobnost úmrtí ve vysokých věcích

- ▶ Gompertzův zákon pro určitý věk x_0 : $fn(x) = -\log \{1 - q(x)\}$

$$fn(x+1) = fn(x) \times \alpha$$

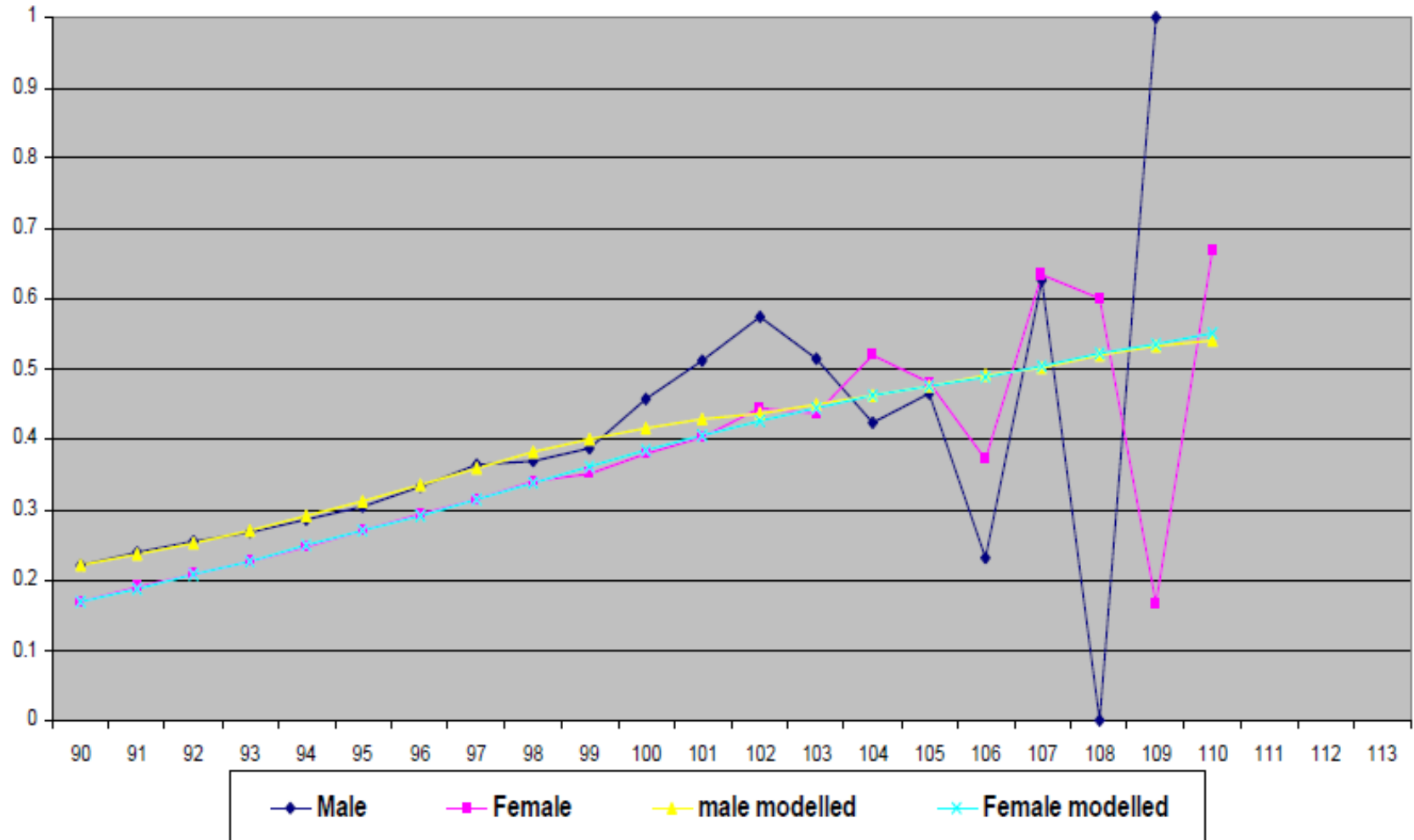
$$\text{so } fn(x_0+t) = fn(x_0) \times \alpha^t$$

- ▶ Odtud lze vyjádřit

$$q'_x = 1 - e^{e^{\alpha(x-x_0)} \ln p'_{x_0}}$$

$$\bar{e}_{x_0} = 0.5 + \sum_{x_t=x_0} \prod_{x=x_0}^{x_t} e^{e^{\alpha(x-x_0)} \ln p'_{x_0}}$$

Pravděpodobnost úmrtí ve vysokých věcích



Literatura

- ▶ Cairns, A.J.G., et al – A Quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models Using Data from England and Wales and the United States, North American Actuarial Journal, Vol. 13, No. 1, 2009
- ▶ Cairns, A.J.G, Blake, D., Dowd, K. – Modelling and Management of Mortality Risk: A Review, Scandinavian Actuarial Journal, Issue 2-3, 2008
- ▶ Lee, R.D. – The Lee-Carter Method of Forecasting Mortality, with various Extensions and Applications, North American Actuarial Journal, Vol. 4, No. 1, 2000
- ▶ Pitacco, E., et al – Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business, Oxford, 2009
- ▶ The Human Mortality Database, www.mortality.org

Děkuji za pozornost!

Otázky?