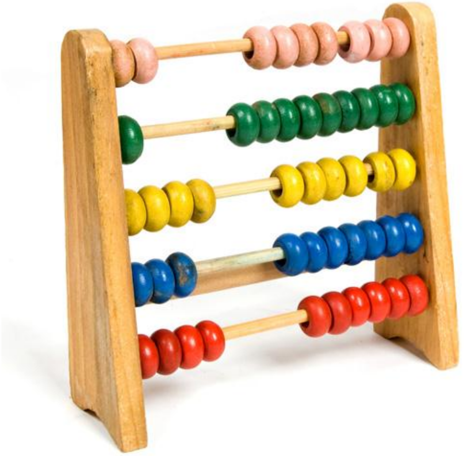
Výpočet kapitálu pomocí přístupu "nested stochastic" a jeho alternativ



Petr Svojítka

SAV, 22.3.2013

Úvodní poznámky

- Především se bude týkat výpočtu SCR pro tržní riziko, nicméně z velké části jsou uvedené přístupy použitelné i k výpočtu kapitálu pro ostatní rizika

- Praktické aspekty – osobní zkušenost s vývojem částečného interního modelu pro výpočet tržního rizika založeného na přístupu „nested stochastic“

- „Nested stochastic“ = „vnořená stochastika“ (?)

Obsah

- Kapitál podle Solventnosti II

- Model založený na přístupu „nested stochastic“
  - Obecné poznámky k modelu
  - Optimální počet scénářů
  - Kalibrace vnitřních scénářů
  - Filtrování vnějších scénářů

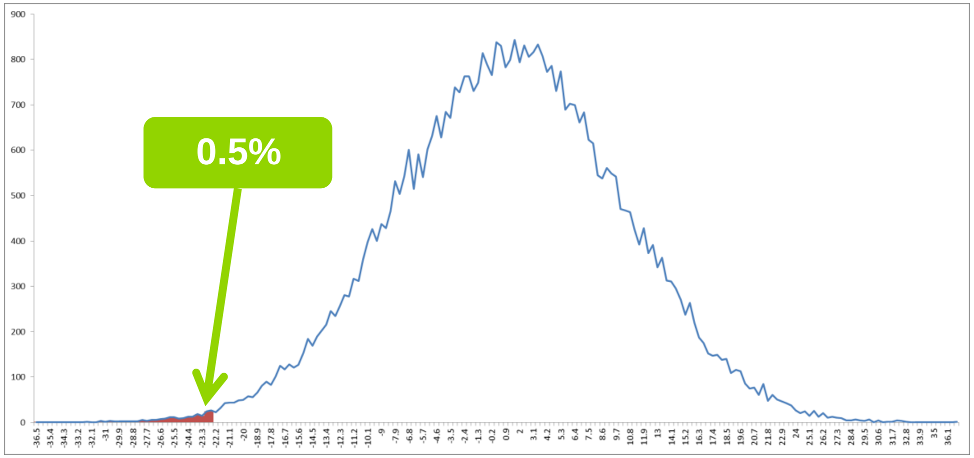
- Alternativy k přístupu „nested stochastic“
  - Curve fitting
  - Least Squares Monte Carlo (LSMC)
  - Standardní formule, replikační portfolia

Kapitál podle Solventnosti II

Kapitálový požadavek podle Solventnosti II

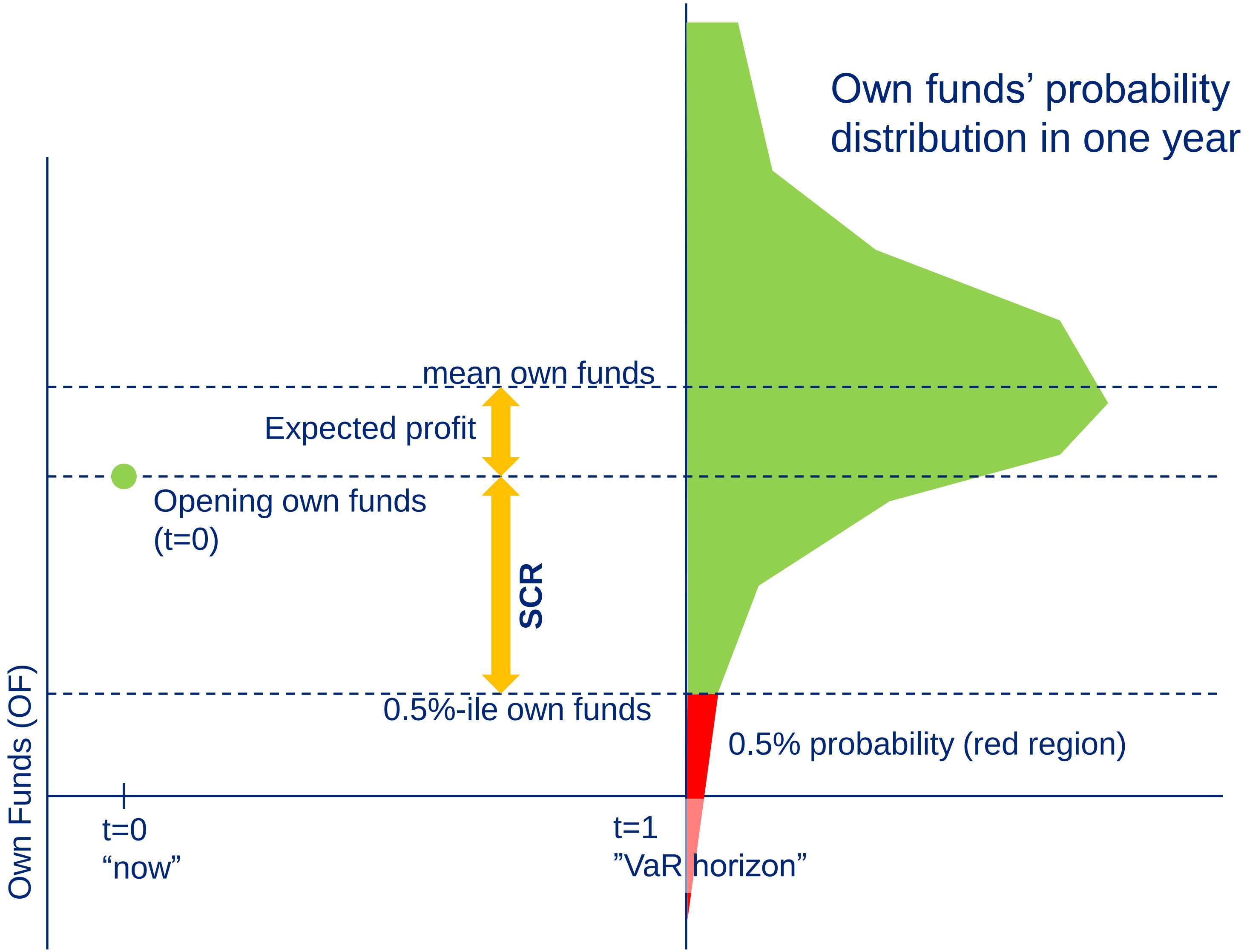
- „Solventnostní kapitálový požadavek odpovídá hodnotě v riziku primárního kapitálu pojišťovny nebo zajišťovny na hladině spolehlivosti 99,5 % v časovém horizontu jednoho roku.“

- Primární kapitál (own funds): rozdíl mezi hodnotou aktiv a závazků
- Na změnu primárního kapitálu lze pohlížet jako na náhodnou veličinu – zajímá nás tedy rozdělení změny primárního kapitálu během následujícího roku



- Pro výpočet SCR potřebujeme znát pouze chvost rozdělení
- Znalost celého rozdělení však může být užitečná pro jiné účely
  - Hedging
  - Řízení rizik, správa kapitálu
  - …

Kapitálový požadavek podle Solventnosti II

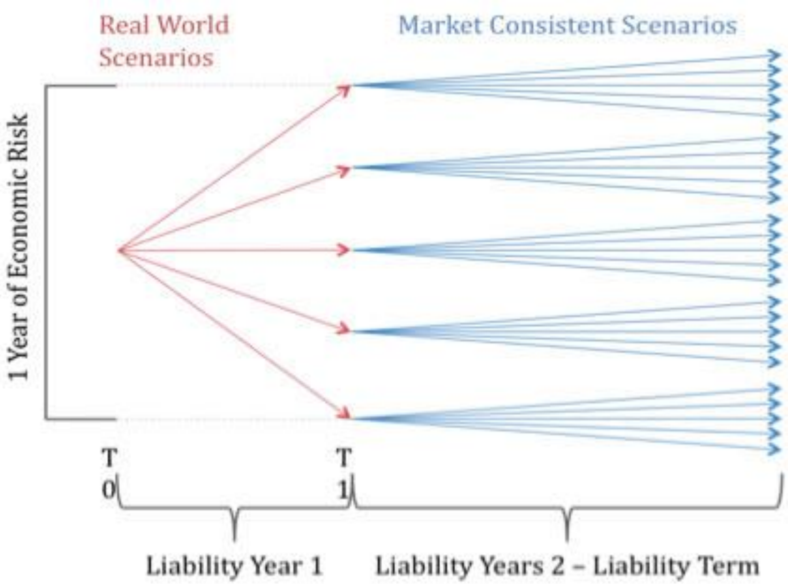


Výpočet kapitálu

- Kroky vedoucí k výpočtu kapitálu
  - Určení rizikových faktorů
  - Nalezení sdruženého pravděpodobnostního rozdělení vývoje rizikových faktorů v průběhu prvního roku
  - Ocenění primárního kapitálu v každém scénáři
  - Nalezení příslušného kvantilu výsledného rozdělení

- V praxi značně problematické
  - Analyticky proveditelné jen ve zvláštních případech
  - Obtížné nalézt rozdělení pro jednotlivé rizikové faktory
  - Ještě obtížnější nalezení sdruženého rozdělení
    - Těžko dostupná data, zvláště na chvostu rozdělení (kde nás to zajímá nejvíce)
    - Popis závislosti mezi rizikovými faktory může být složitý

Ocenění primárního kapitálu



- Vnější scénář: projekce vývoje během prvního roku
- Ocenění aktiv a závazků na konci prvního roku
  - Hodnota ovlivněna vývojem ve vnějším scénáři
  - Opce a garance => tržně konzistentní ocenění pomocí sady vnitřních scénářů

- „Nested stochastic“:
  - Sada vnějších scénářů
    - Měla by rozumně pokrýt sdružené rozdělení rizikových faktorů
    - Při více rizikových faktorech obvykle obsahuje řádově 100 000 scénářů
  - Ocenění pro každý vnější scénář – např. 1 000 vnitřních simulací
  - „Ideální“ přístup pro určení kapitálu
    - Přesný výpočet (v rámci zmíněných omezení zahrnutých ve scénářích)
    - Nicméně praktická proveditelnost může být problematická

Model založený na přístupu „nested stochastic“

Úvod

- Představení modelu
- Optimální počet scénářů
- Kalibrace vnitřních scénářů
- Filtrování vnějších scénářů

Představení modelu

- Částečný interní model pro výpočet tržního rizika pro skandinávskou pojišťovnu
- Implementace v Prophetu, ALS knihovně
- Požadavky
  - Zohlednění specifických pravidel na přidělování nadvýnosu
  - Zohlednění pravidel pro alokaci do jednotlivých tříd aktiv
  - Využití stávajícího deterministického modelu závazků => závazky modelovány „flexing“ přístupem
  - Model na měsíční bázi (zohlednění manažerských akcí v průběhu prvního roku)
- Především způsob modelování závazků a časový krok modelu jsou významné aspekty ve vztahu k „nested stochastic“ přístupu

Představení modelu

- Použití deterministického modelu – „flexing“:
  - Závazky do modelu vstupují v podobě jednotlivých cash flow – výsledek deterministického modelu seběhnutého s předpokladem nulového nadvýnosu
  - Portfolio rozděleno na několik (řádově desítky) segmentů podle produktu/TÚM/…
  - CF se upravují v závislosti na vývoji v každém scénáři (přidělený nadvýnos, dynamická storna) – výpočet multiplikativních koeficientů

		CALENDAR_YR - Calendar Year				
IDX_CFLOW	Variable Name	201012	201101	201102	201103	20
1	MATH_RES_IF	15000000	15000000	15000000	15000000	1500
1	VAL_SA_IF	550000000	550000000	550000000	550000000	55000
1	VAL_NETP_IF	4100000000	4100000000	4100000000	4100000000	410000
2	MATH_RES_IF	25000000	25000000	25000000	25000000	2500
2	VAL_SA_IF	350000000	350000000	350000000	350000000	35000
2	VAL_NETP_IF	2100000000	2100000000	2100000000	2100000000	210000

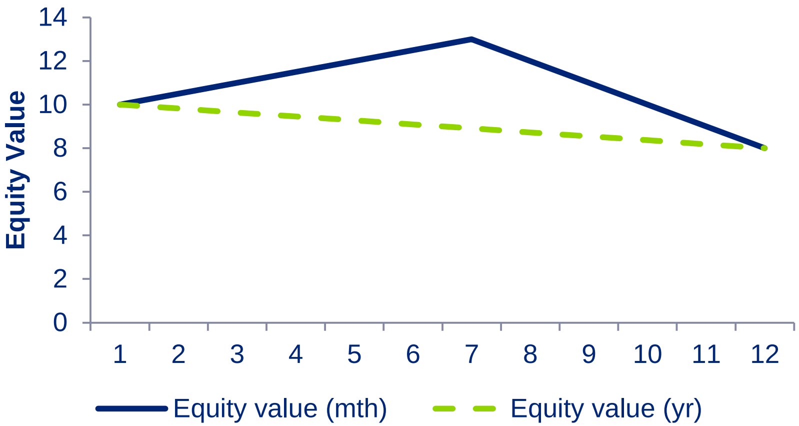
$$(1+b)\times MR = (1+k)\times PV(SA) - PV(Prem)$$

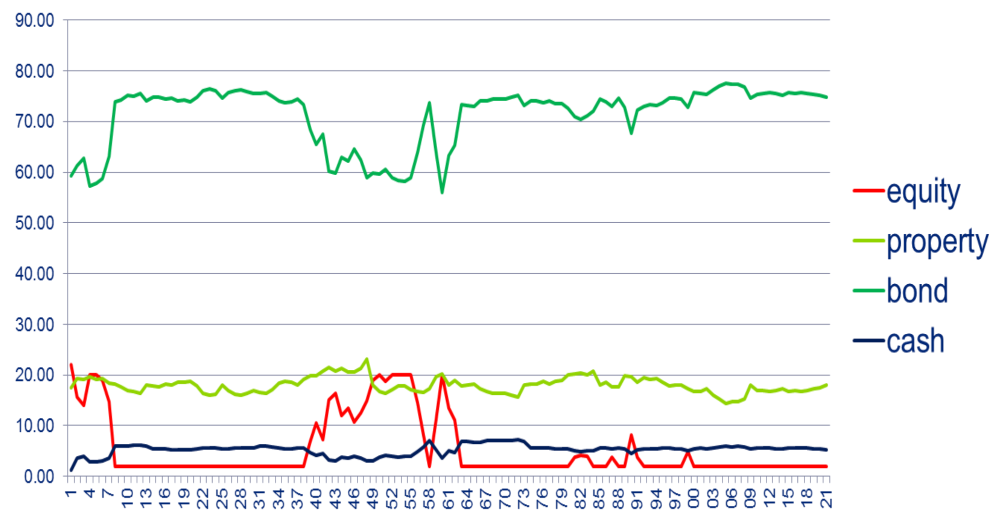
$$b = MAX(0, (InvInc_{rate} - gteed_{rate}) \times PS_{ratio})$$
$$k = b \times \frac{MR}{PV(SA)}$$

- Zjednodušený, ale v praxi ověřený přístup. Při vhodné segmentaci vede ke spolehlivým výsledkům
- Výrazná úspora času oproti závazkům přímo modelovaným v rámci stochastického modelu

Představení modelu

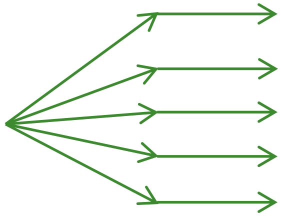
- Modelování na měsíční bázi:
  - Model může reagovat na vývoj během prvního roku (manažerská pravidla)
  - Měsíční scénáře přímo generované ESG
    - Je chybné použít roční a interpolací získat měsíční hodnoty: tím získáváme informaci navíc pro manažerská rozhodnutí, kterou ve skutečnosti nemáme
    - V případě interpolovaných ročních scénářů, je reakce na vývoj v prvním měsíci vždy výhodná. V realitě to tak ale nemusí být!





Představení modelu

- Model použitelný pro výpočet MCEV
  - Navíc možnost přepnutí do „nested stochastic“ režimu:
    - Pro každý vnější scénář „zastavení“ projekce po prvních 12 měsících -> běh příslušné sady vnitřních simulací -> přechod na další vnější scénář
- Ocenění v čase 0 – (odpovídá 1 výpočtu MCEV), 2 běhy pro výpočet BEL (Best Estimate Liabilities)
  - Centrální scénář (CEV)
  - Stochastický běh: TVOG (časová hodnota opcí a garancí)
- Ocenění v čase t = 1 rok pro každý vnější scénář (výpočet MCEV pro každý vnější scénář)
  - Opět 2 běhy pro určení hodnoty aktiv a BEL:
    - „Centrální“: vnitřní CEV scénář pro každý vnější

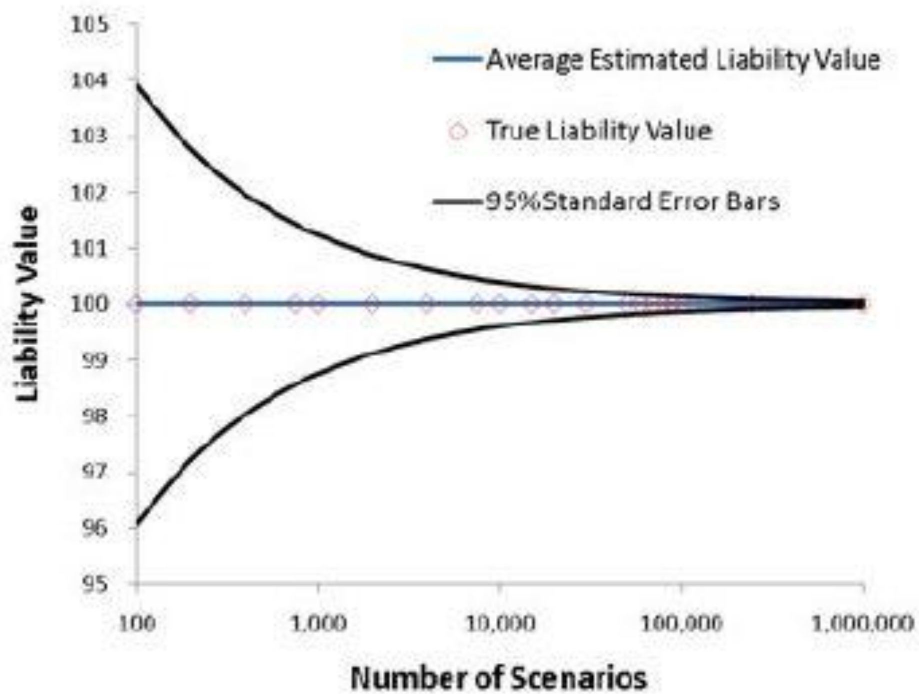


    - Stochastický: tržně konzistentní sada vnitřních scénářů pro každý vnější (TVOG)

Optimální počet scénářů

- Výpočet podléhá dvěma zdrojům výběrové chyby, které konvergují různým tempem
  - Odhad hodnoty závazků (vnitřní scénáře)
  - Odhad kvantilu změny primárního kapitálu (vnější scénáře)

- Uvažujme závazek s normálním rozdělením se střední hodnotou 100 a směrodatnou odchylkou 20
- Při 1 000 simulacích a 95% intervalu spolehlivosti vychází chyba do 1.25
- Chyba klesá s odmocninou počtu simulací

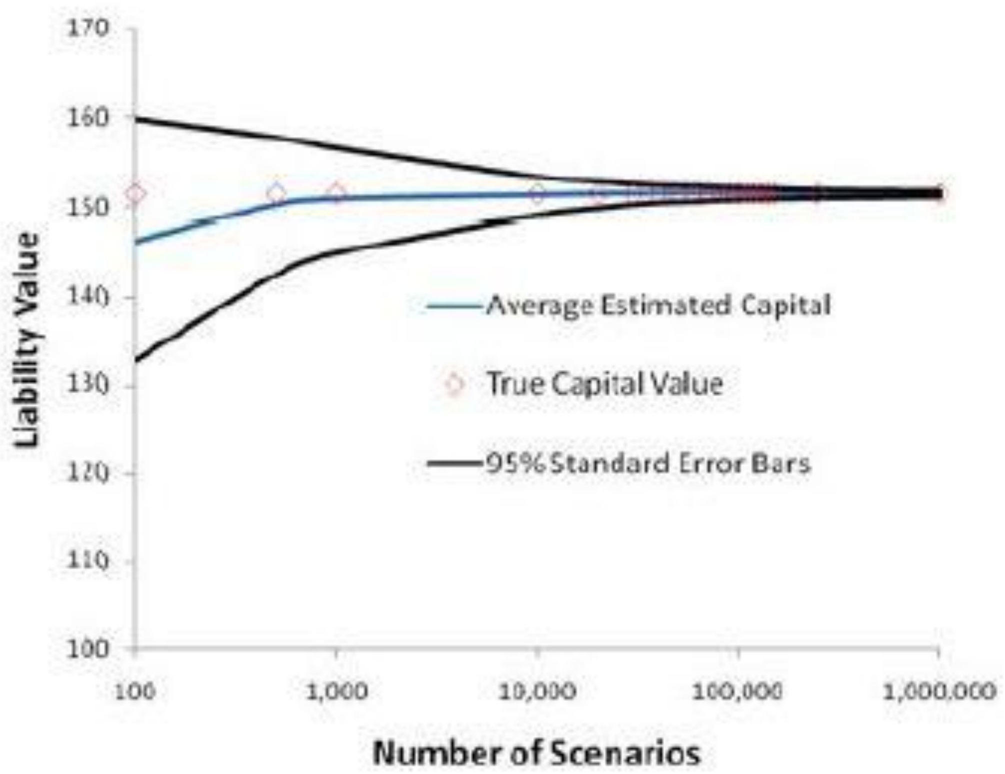


Optimální počet scénářů

- Výběrová chyba vnějších scénářů
- Předpokládejme, že víme přesnou hodnotu závazků pro každý vnější scénář
- Odhad 99.5% kvantilu konverguje mnohem pomaleji než odhad hodnoty závazků v předchozím příkladu
- Při 1 000 simulacích je v tomto příkladu chyba odhadu kapitálu kolem 4% skutečné hodnoty

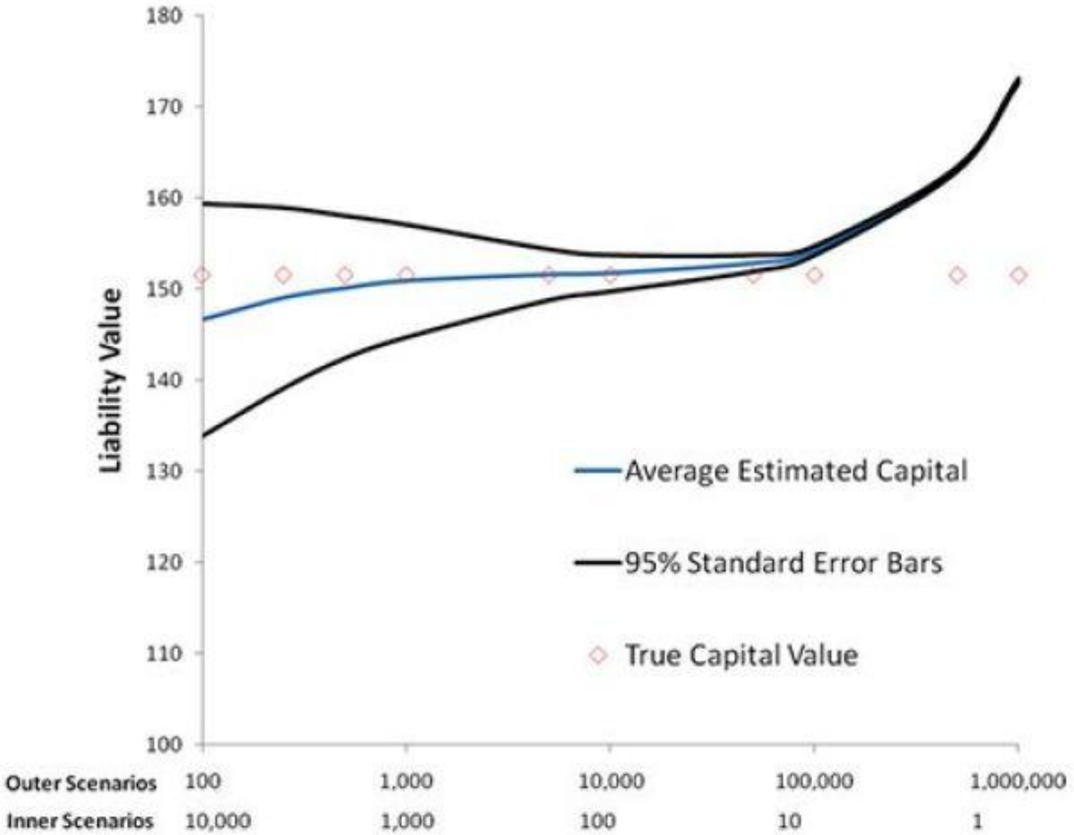
⇒ k dosažení stejné přesnosti je potřeba více simulací

(Konstrukce intervalu spolehlivosti pomocí pořádkových statistik rovnoměrného rozdělení)



Optimální počet scénářů

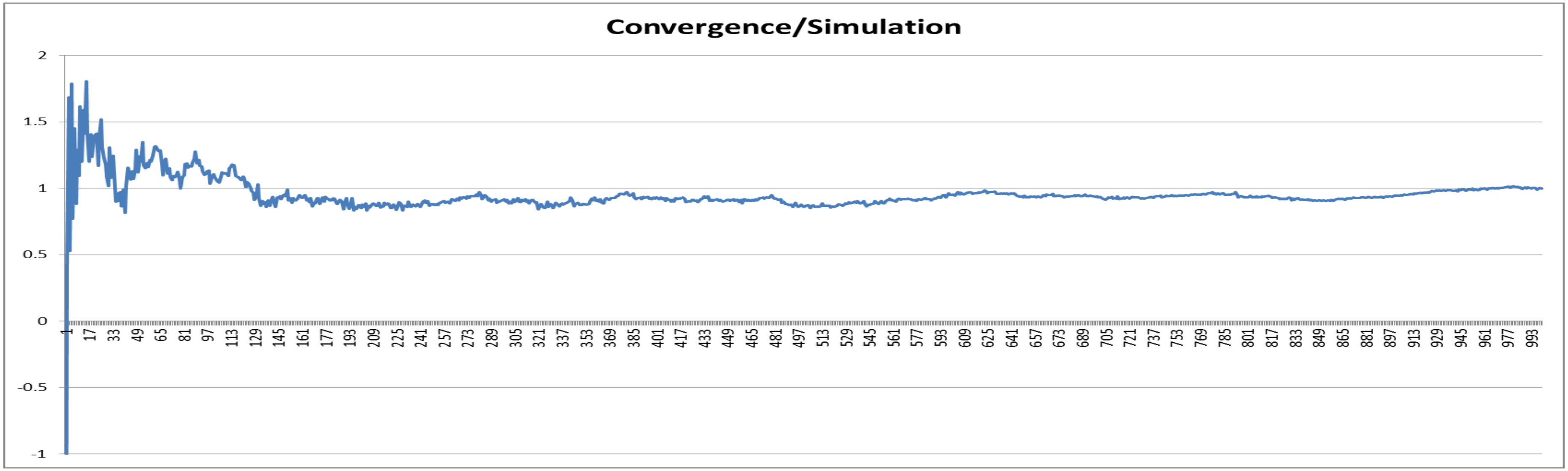
- Celková výběrová chyba vnitřních i vnějších scénářů
- Jak rozdělit milion scénářů mezi vnitřní a vnější?
- Zkreslený odhad pro malý počet vnitřních scénářů
- Podhodnocený odhad pro malý počet vnějších scénářů
- „Přirozená“ volba 1 000 x 1 000 není výhodná
- Optimální počet scénářů:
  - 10 000 – 100 000 vnějších
  - 10 – 100 vnitřních



Optimální počet scénářů

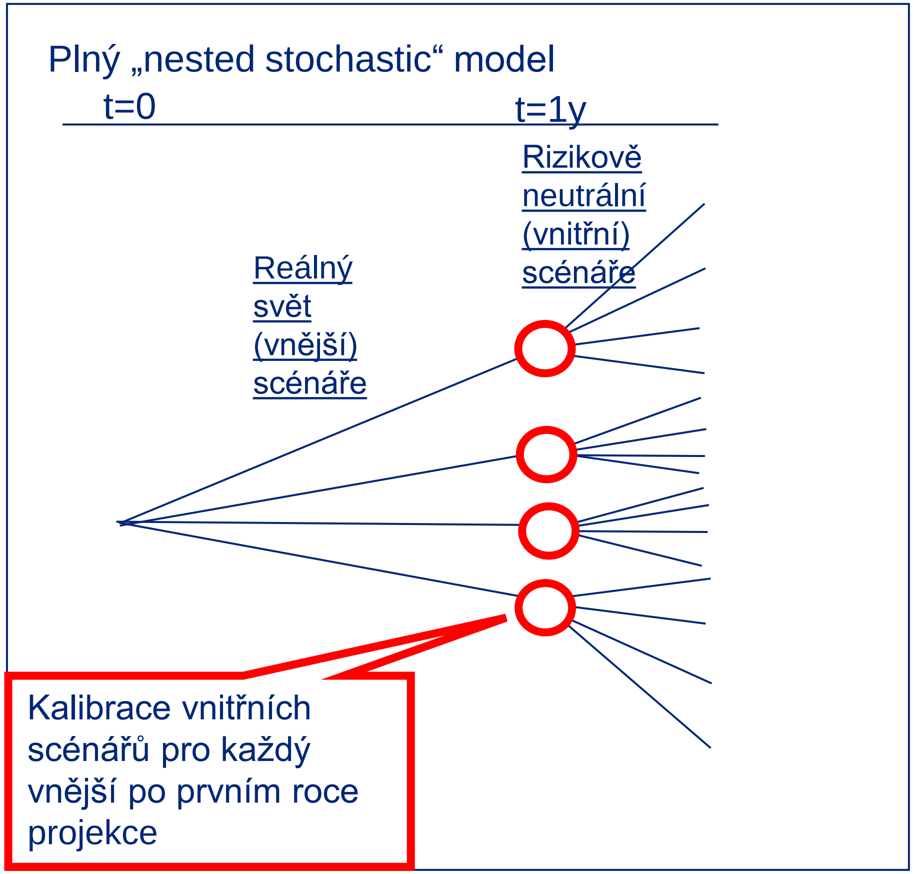
- Pro model použito 50 000 vnějších a 250 vnitřních scénářů

- Určení počtu scénářů na základě
  - Dostupné výpočetní kapacity
  - Vlastností ekonomických scénářů
  - Testování konvergence



Kalibrace vnitřních scénářů

- Pro každý vnější scénář je potřeba odpovídající sada vnitřních scénářů
- Model pracuje s jednou sadou rizikově neutrálních scénářů
- Kalibrace pro každou vnější simulaci:
  - Spotové sazby v čase t = 1 rok nahrazeny novými sazbami
  - Sazby a akciové indexy v dalších letech projekce upraveny tak, aby nebyla narušena tržní konzistence scénářů



- Značení:

$ZCB(n,m)$ … cena n-letého bezkuponového dluhopisu v čase m; $ZCB(n,0) = ZCB(n)$
D(m) … hodnota deflátoru v čase m
$Eq\_Idx(m)$ … akciový index v čase m

Kalibrace vnitřních scénářů

- Posunutí cen tak, aby následující faktory zůstaly nezměněny

$$C(n,m) = \frac{ZCB(n-m,m)}{ZCB\ (n)/ZCB(m)}$$

- Pro CEV scénář $C(n,m) = 1$ pro všechna n, m

CLASS	MEASURE	TERM	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
VALN	DEF	0	1.000000	0.988176	0.964887	0.934723	0.901913	0.868047	0.833531
ZCB	PRICE	5	0.868047	0.843504	0.827772	0.817254	0.808744	0.801167	0.794399
ZCB	PRICE	10	0.695451	0.670079	0.652550	0.639738	0.628940	0.619215	0.611424

OLD_FRWD_PRICE[5,5] = ZCB[10] / ZCB[5] = 0.801167

ZCB[5, 5] = 0.801167

- Na základě cen odpovídajících nové křivce $ZCB^*(m)$ definujeme posun

$$S(m) = \frac{ZCB^*(m)}{ZCB(m)}$$

Kalibrace vnitřních scénářů

- Definice nových deflátorů

$$E_m(D^*(m)) = ZCB^*(m) \times D(0)$$

$$\Rightarrow \quad D^*(0) = D(0),\quad D^*(m) = D(m) \times S(m).$$

- Definice nových akciových indexů

$$E_m(Eq\_Idx^*(m) \times D^*(m)) = Eq\_Idx^*(0) \times D(0)$$

$$\Rightarrow \quad Eq\_Idx^*(0) = Eq\_Idx(0),\quad Eq\_Idx^*(m) = \frac{Eq\_Idx(m)}{S(m)}$$

- Definice nových cen bezkuponových dluhopisů

$$E_m(ZCB^*(n-m,m) \times D^*(m)) = ZCB^*(n) \times D(0)$$

$$\Rightarrow \quad ZCB^*(n-m,m) = \frac{ZCB(n-m,m)}{S(m)} \times \frac{ZCB^*(n)}{ZCB(n)} = ZCB(n-m,m) \times \frac{ZCB^*(n)/ZCB^*(m)}{ZCB(n)/ZCB(m)}$$

$$C(n,m) = \frac{ZCB^*(n-m,m)}{ZCB^*(n)/ZCB^*(m)} = \frac{ZCB(n-m,m)}{ZCB\ (n)/ZCB(m)}$$

Časová náročnost

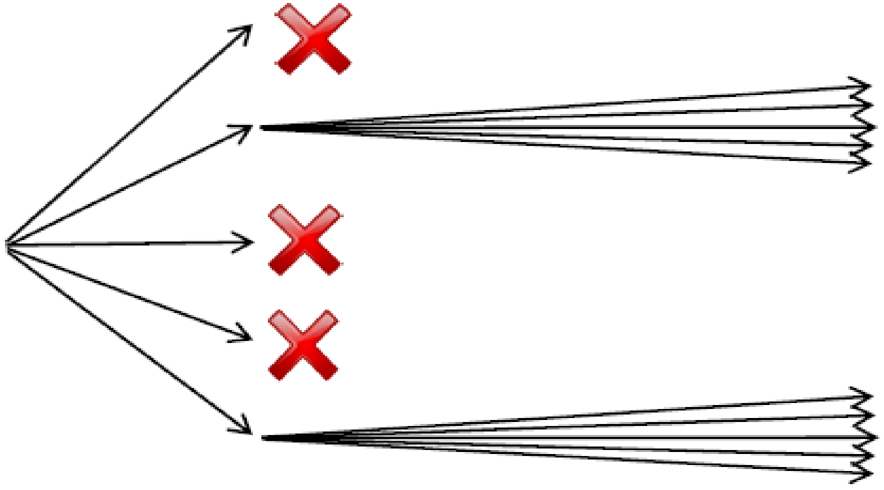
- Orientační údaje o časové náročnosti modelu

	Počet simulací	Výpočetní čas	Výpočetní čas (100 procesorů)
1 simulace	1	17 s	
Ocenění v čase 0	1 000	4.7 hod	3 min
"Nested stochastic" - CEV	50 000 x 1 = 50 000	9.8 dnů	2.4 hod
"Nested stochastic" - plný	50 000 x 250 = 12 500 000	2459 dnů	24.6 dnů

- Nutnost další výrazné optimalizace výpočtu
  - předpokládejme 4 s na jednu simulaci
  - Stále plný model bude běžet přibližně 6 dní
  - V praxi navíc nemusí být počet použitých procesorů a celkový výpočetní čas lineárně závislé

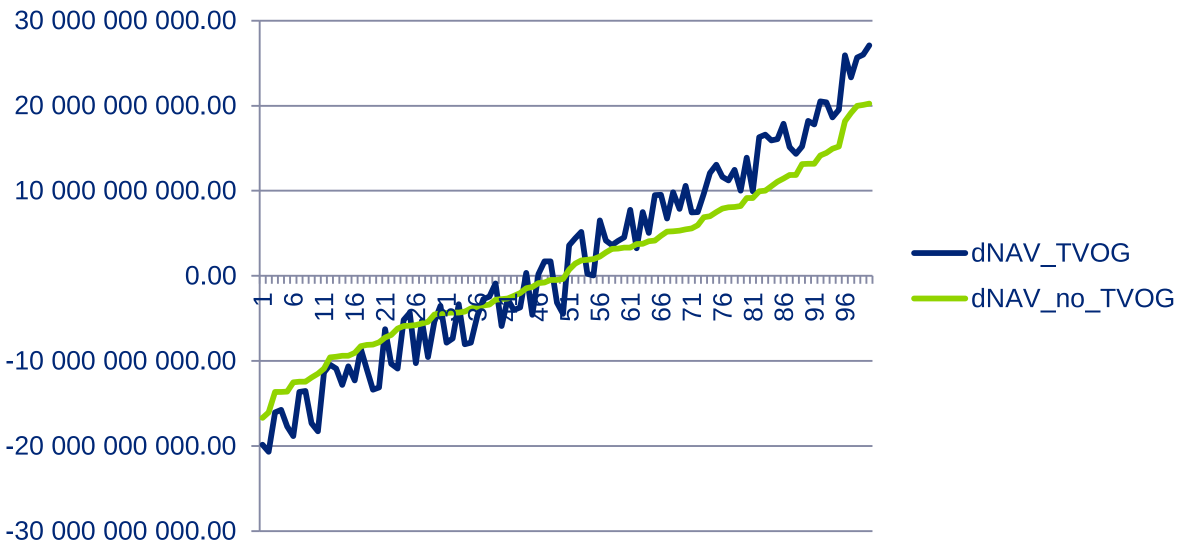
Filtrování vnějších scénářů

- Cílem je dosáhnutí stejné přesnosti výpočtu SCR jako při plném „nested stochastic“ běhu, ale s výrazně menším počtem simulací
- Účelem je eliminovat vnější scénáře, které nejsou součástí chvostu
- Postup:
    - Seběhnutí všech vnějších scénářů, pro každý z nich vnitřní CEV scénář
    - Výběr vnějších scénářů, které „kandidují“ na SCR. Řekněme 10% nejhorších scénářů podle předem vybraného kritéria – např.:
        - Součet profitu v prvním roce z vnějšího scénáře, PVFP z vnitřního scénáře a hodnota fondů patřících akcionáři na konci prvního roku
    - Seběhnutí vybraných vnějších scénářů s kompletní sadou vnitřních simulací
    - Určení SCR



Filtrování vnějších scénářů

- Použití metody by mělo být podpořeno testy
  - Konvergence
  - 100 náhodně vybraných vnějších scénářů, pro každý ocenění na 250 vnitřních
    - Graf znázorňuje změnu primárního kapitálu s a bez zahrnutí TVOG
    - Simulace jsou seřazeny od nejhorší k nejlepší (s vyloučením TVOG)



Filtrování vnějších scénářů

- Výhody
  - Výrazná úspora výpočetního času
  - Snadná implementace bez nutnosti dalšího aparátu
- Nevýhody
  - „Neanalytický“ postup
  - Závisí na vhodné volbě kritérií pro filtrování => nutnost optimalizace pro každý daný případ (nelze zobecnit)
  - Nezískáme celé rozdělení, pouze chvost

- Mezistupeň před implementací „sofistikovanějšího“ zjednodušení (Curve fitting, LSMC).
  - Poté např. jednou ročně běh plného modelu pro kalibraci alternativní metody, která se pak používá k dalším výpočtům v průběhu roku

Alternativy k přístupu „nested stochastic“

Možné přístupy k výpočtu kapitálu

- „Nested stochastic“
    - Plný počet simulaci
    - Filtrování scénářů případně jiná zjednodušení

- Alternativní metody
    - Curve fitting
    - Least Squares Monte Carlo (LSMC)

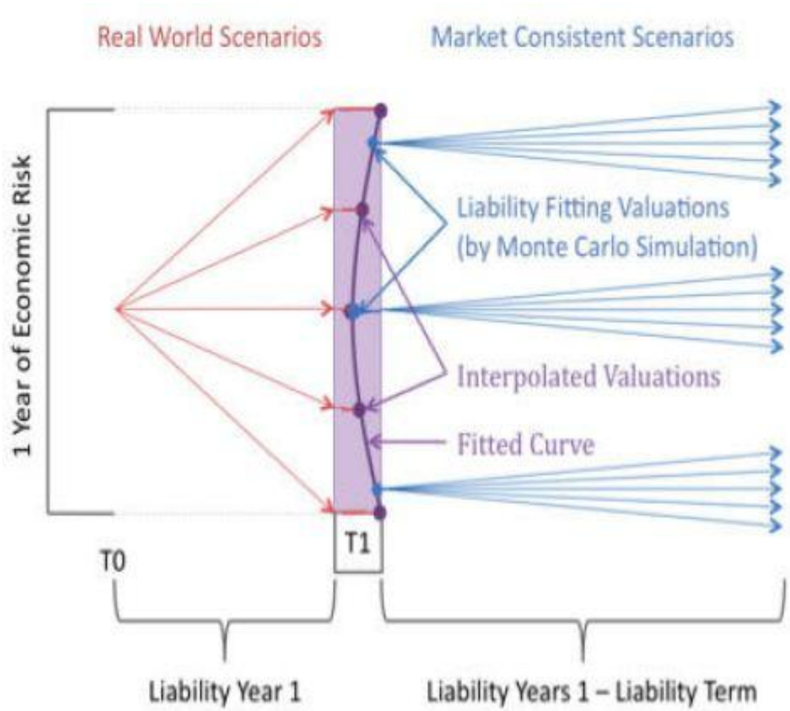
    - Standardní formule
    - Replikační portfolia

Curve fitting

- Hodnota společnosti je funkcí pouze rizikových faktorů (stejně jako např. put opce je funkcí hodnoty podkladového aktiva, v případě celé společnosti je tato funkce velmi složitá)
  - Vstup: hodnota rizikových faktorů (tj. jeden vnější scénář)
  - Výstup: hodnota závazků v daném scénáři
- Přístup „nested stochastic“ je neefektivní
  - Pro 2 téměř identické real-world simulace je hodnota závazků velmi blízká
  - Přesto pro každý vnější scénář provedeno nezávislé ocenění
- Odhad hodnoty závazků pouze v několika důležitých bodech a interpolace
  - Výpočet SCR pak už snadný: pro každý vnější scénář určení změny primárního kapitálu s použitím nalezené křivky; 99.5% nejhorší výsledek je SCR

Curve fitting

- Závislost na řadě rizikových faktorů => proložení vícerozměrné křivky
- Po částech lineární interpolace, polynom nebo složitější funkce
- S rostoucím počtem rizikových faktorů roste počet koeficientů, které musíme získat pro popis křivky => roste počet ocenění, která je nutno provést
- Může se blížit náročnosti plného „nested stochastic“ přístupu



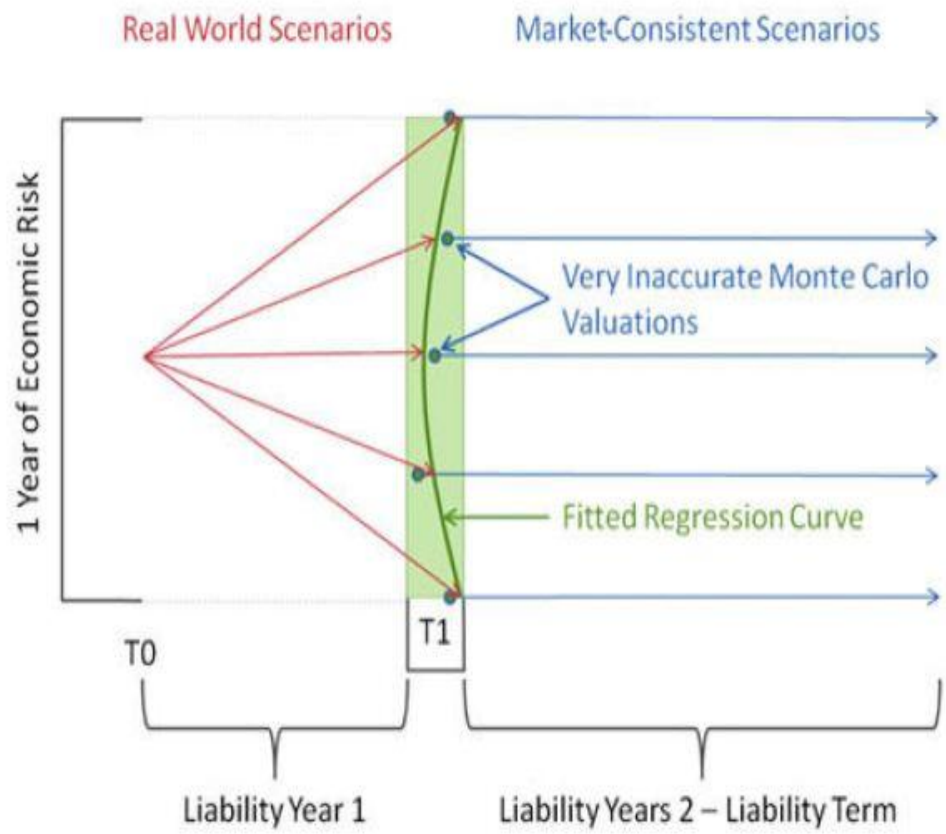
Curve fitting

- Metoda může vést k významnému urychlení výpočtu SCR (při rozumném počtu bodů) oproti „nested stochastic“ výpočtu
- Pokročilejší metoda oproti standardní formuli

- Nicméně některé nevýhody zůstávají:
  - Výpočetní čas: s počtem rizik roste počet bodů pro proložení křivky
  - Výběrová chyba: křivka prokládána body zatíženými chybou
  - Nutný úsudek k výběru vnějších simulací pro nalezení křivky
  - Výběr konkrétní funkce
  - Složitý odhad chyby výpočtu kapitálu

Least Squares Monte Carlo

- Přímo vychází z plného „nested stochastic“ přístupu:
    - Kompletní sada vnějších scénářů pro vývoj během prvního roku
    - Pouze 1 vnitřní simulace místo celé sady rizikově neutrálních scénářů
- Pro každý vnější scénář je tedy ocenění závazků po 1. roce velmi nepřesné
- Přesnost jednotlivých výsledků nahrazena regresní analýzou
- Místo výsledků vnitřní simulace se k ocenění použije regresní křivka



Least Squares Monte Carlo

- Regresní analýza
  - Minimalizace nejmenších čtverců
  - Závislá proměnná: hodnota závazků
  - Nezávislé proměnné: hodnoty rizikových faktorů po 1. roce projekce (tj. vícerozměrná regrese)

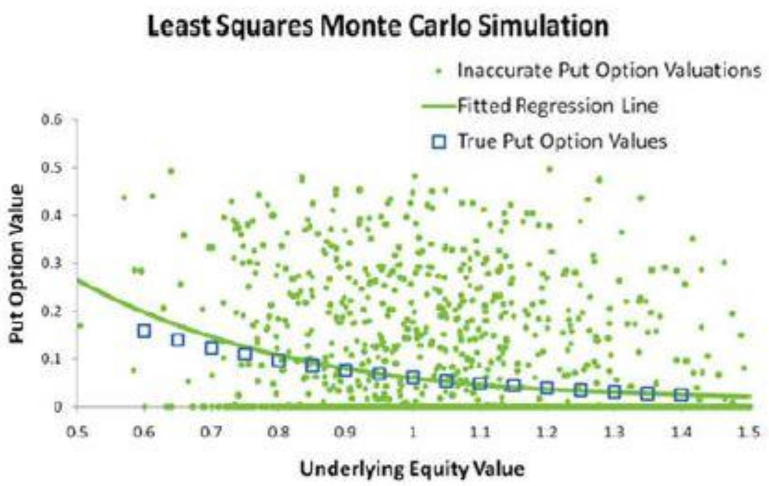
  - Různé typy regrese – např. lineární (polynomiální) regrese pro 2 rizika, polynom 3. stupně:

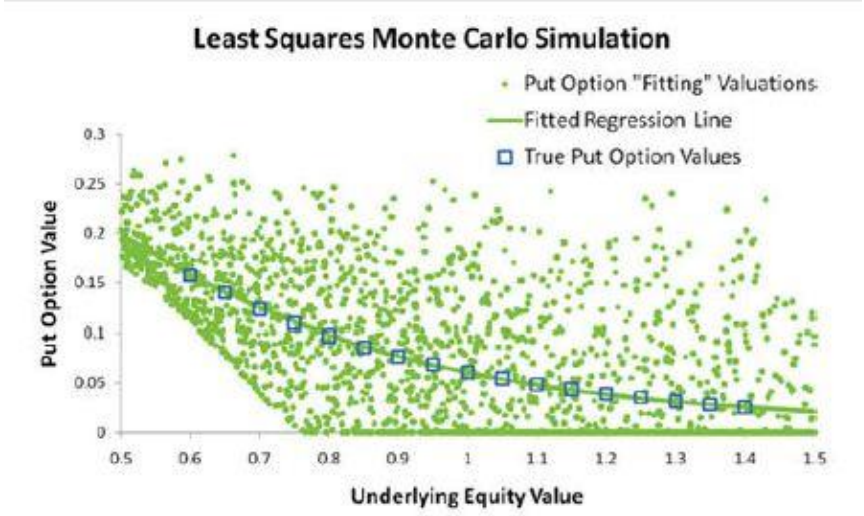
$$\boxed{L(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 y + a_5 y^2 + a_6 y^3 + a_7 xy + a_8 x^2 y + a_9 x y^2}$$

  - Cílem je nalezení koeficientů a_0 ... a_9.

Least Squares Monte Carlo

- Další možné vylepšení metody
  - Oddělení regresní a výpočetní fáze – použití různých sad vnějších scénářů pro účely regrese a pro samotný výpočet SCR
    - Použití většího počtu simulací pro odvození oceňovací funkce
    - Eliminace výběrové chyby tam, kde nás to nejvíce zajímá (chvost)

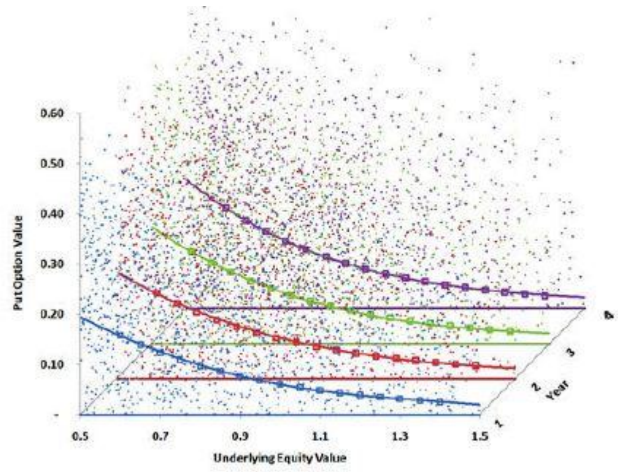




  - Použití více vnitřních scénářů pro odvození křivky (např. 2 nebo 3)

Least Squares Monte Carlo

- Podobný postup jako curve fitting (odvození křivky a její použití pro ocenění závazků v každém vnějším scénáři), ale
  - Curve fitting: proložení křivky malým počtem relativně přesných bodů
  - LSMC: proložení křivky velkým počtem nepřesných bodů
- Výhody LSMC
  - Efektivnější využití informace oproti předchozí metodě => přesnější křivka v kratším čase
  - Může reálně zachytit detailnější charakteristiky portfolia zvýšením počtu nezávislých proměnných (např. informace o alokaci aktiv po prvním roce projekce apod.)
  - Použitelné i pro projekci SCR do budoucnosti



Standardní formule

- Výpočet zvlášť pro jednotlivé rizikové faktory a agregace pomocí korelační matice

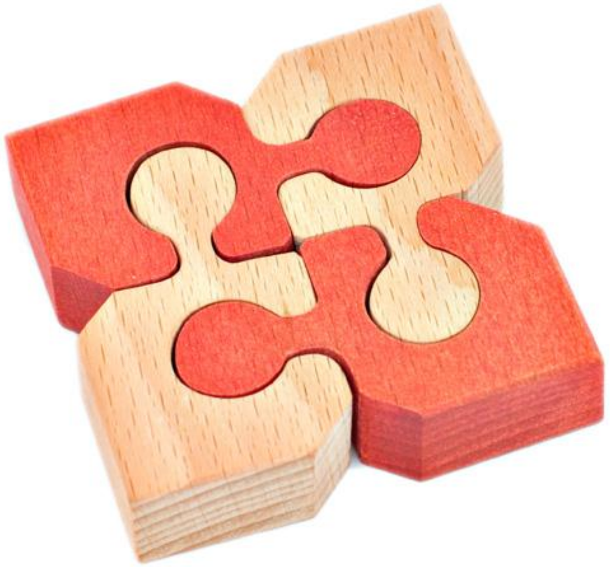
$$SCR_{market} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

- Hlavní omezení oproti předchozím metodám
  - Šoky jsou okamžité – neodpovídá definici SCR (horizont jednoho roku) => nemožnost reagovat na vývoj v prvním roce, může být významné především pro tržní riziko
  - V souvislosti s agregací pomocí korelační matice se předpokládá
    - Sdružené rozdělení rizikových faktorů je vícerozměrné normální
    - Primární kapitál závisí na rizikových faktorech lineárně (jedna senzitivita na změnu rizikového faktoru definuje chování při každé změně)
  - V případě nesplnění předpokladů vede k velké chybě výpočtu
- Výhody
  - Jednoduchý výpočet: pro každý rizikový faktor pouze jeden běh modelu (rizikově neutrální ocenění) => celkem pouze desítky běhů modelu oproti milionům simulací v případě plného „nested stochastic“ modelu
  - Parametry jsou dané – není nutné zkoumat rozdělení a vztah rizikových faktorů (to může ale být i nevýhoda)

Replikační portfolia

- Základní principy:
  - Nahrazení závazků portfoliem aktiv, které replikuje finanční toky daných závazků
  - Ocenění portfolia aktiv je pak mnohem jednodušší než ocenění původních závazků (jsou potřeba pouze vnější scénáře oproti nutnosti použití velkého počtu vnitřních)
  - Postup:
    - Nalezení aktiv – kandidátů pro zahrnutí do replikačního portfolia
    - Ocenění závazků v několika ekonomických scénářích
    - Nalezení vah pro vybraná aktiva tak, aby výsledné portfolio co nejlépe replikovalo peněžní toky závazků
    - Otestování replikace
- Nevýhody
  - Pouze pro tržní riziko
  - Často je potřeba zapojit úsudek nebo manuální úpravy při hledání vhodného portfolia
  - Obtížné zachycení dynamického chování pojistníků apod.
  - …
- Výhody
  - V případě dobrého replikačního portfolia je ocenění velmi jednoduché a elegantní

Shrnutí



Shrnutí

- „Poctivý“ výpočet kapitálu – přístup „nested stochastic“
  - Model by měl brát v úvahu specifické požadavky
    - Možnost reagovat na vývoj během prvního roku
    - Rychlost – optimalizace, zjednodušení (např. „flexing“ závazků,…)
  - Problémem je velká náročnost na čas potřebný k výpočtu

- Alternativní (doplňkové) přístupy
  - Filtrování v rámci plného modelu
  - Curve fitting, LSMC
  - Standardní formule, replikační portfolia
- Praxe by mohla být:
  - Plný „nested stochastic“ model – použití ke kalibraci a validaci zjednodušeného přístupu
  - Výpočet SCR pomocí zjednodušeného přístupu (LSMC, curve fitting)

Děkuji za pozornost!

Petr Svojítka
Actuarial & Insurance Solutions
Email: psvojitka@deloitteCE.com

Použité zdroje

- Koursaris, Adam (2011), *Using nested stochastic modelling for capital calculation*, (http://www.insuranceerm.com/analysis/using-nested-stochastic-modelling-for-capital-calculation.html)
- Koursaris, Adam (2010), *Calculating the solvency capital requirement, part 1 – 4*, (http://www.insuranceerm.com/analysis/calculating-the-solvency-capital-requirement-part-1.html)
- Serfling, Robert J. (1980), *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, Wiley, New York.